



# Analyse de la stabilité d'ouvrages en gabions cellulaires par la théorie du calcul à la rupture

Alain Corfdir

## ► To cite this version:

Alain Corfdir. Analyse de la stabilité d'ouvrages en gabions cellulaires par la théorie du calcul à la rupture. Matériaux. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997. Français. NNT : . tel-00523026

**HAL Id: tel-00523026**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00523026>**

Submitted on 4 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**  
présentée pour l'obtention du diplôme de  
**DOCTEUR**  
**DE**  
**L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES**  
Spécialité : Structures et Matériaux

par **Alain CORFDIR**

Sujet de la thèse :  
**ANALYSE DE LA STABILITÉ**  
**D'OUVRAGES EN GABIONS CELLULAIRES**  
**PAR LA THÉORIE DU CALCUL À LA RUPTURE**

soutenue à Paris le 7 mars 1997

devant le jury composé de :

Président :	<b>J. SALENÇON</b>
Rapporteurs :	<b>D. AUBRY</b> <b>S. TURGEMAN</b>
Examineurs :	<b>Ph. BISCH</b> <b>P. de BUHAN</b> <b>J.-B. KOVARIK</b>



## **Remerciements**

**Je remercie tout d'abord les personnalités du monde scientifique et technique qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury : Denis AUBRY, Philippe BISCH, Patrick de BUHAN, Jean-Bernard KOVARIK, Jean SALENÇON, Sylvain TURGEMAN.**

**J'ai une gratitude toute particulière envers Jean SALENÇON qui a présidé le jury. Mais l'origine de cette gratitude remonte bien avant. Ses cours à l'ENPC ont joué un rôle décisif dans mon intérêt pour la mécanique. Au cours de cette thèse, j'ai pu bénéficier de ses conseils durant de longues discussions avec lui.**

**J'ai une lourde dette envers Denis AUBRY et Sylvain TURGEMAN, qui ont accepté la tâche de rapporteurs malgré de multiples obligations et qui m'ont fait de si utiles remarques.**

**Je dois dire toute ma reconnaissance envers Patrick de BUHAN qui a accepté de diriger ma thèse pariant ainsi avec moi sur ma capacité d'entreprendre une activité scientifique après une dizaine d'années dans des fonctions plus administratives. Il faut louer aussi sa disponibilité, ses indications toujours précieuses. Il faut également rappeler son rôle déterminant dans la création puis la direction du CERCSO qui a été mon centre d'accueil pendant cette thèse.**

**Une part importante de ce travail a été réalisée dans le cadre d'un programme de recherche rassemblant la société sidérurgique ARBED, le BUREAU VERITAS et le Service Central Technique des Ports Maritimes et des Voies Navigables. Ceci a permis de nombreux et très intéressants échanges de vue avec notamment Marie-Pierre BOURDOUXHE, Jean-Michel MOULIN, René SALGUES, Alex SCHMITT (ARBED), Didier BERDIN, André ISNARD, Jean-Marc LOCCI (BUREAU VERITAS), Olivier PIET et Jean-Bernard KOVARIK (STCPMVN).**

**Je dois également remercier les collègues du CERCSO qui m'ont soutenu qui par des conseils ou des références, qui par son enthousiasme communicatif ou sa contribution à la bonne ambiance générale : Luc DORMIEUX, Samir MAGHOUS, Daniel AVERBUCH, Arnaud BEKAERT, Emmanuel BOURGEOIS, Arnoult CUVILLIER, Denis GARNIER, Bruno SUDRET, ainsi que notre secrétaire Monique RAZUREL. Je n'oublie pas non plus les chercheurs du LMS, trop nombreux pour les citer individuellement ni des collègues d'autres spécialités comme Damien LAMBERTON et Bernard LAPEYRE.**

**Enfin, j'ai toujours trouvé un soutien efficace dans le service de documentation auprès notamment de Christiane BAUDRY, Marie-France FERTÉ, Brigitte JUDICKAS, Christine HARRAUDEAU et Sabine DOUIHECH.**





# SOMMAIRE

<b>Avant-propos</b>	<b>3</b>
<b>Chapitre 1 Introduction</b>	
1.1 Constitution de la cellule de gabion	5
1.2 Géométrie des gabionnades	9
1.3 Aperçu historique	12
1.4 Utilisation des gabions cellulaires	14
1.5 Les méthodes de dimensionnement classiques	15
1.6 Nouveaux développement sur le dimensionnement	24
1.7 Utilisation du calcul à la rupture	27
<b>Chapitre 2 Modélisation du gabion</b>	
2.1 Modélisation mixte	31
2.2 Critère de résistance pour le remblai	32
2.3 Critère de résistance pour la coque	33
2.4 Résistance des interfaces	38
<b>Chapitre 3 Étude statique du gabion isolé sous poids propre</b>	
3.1 Étude statique en négligeant la résistance à la flexion des palplanches	45
3.2 Étude du problème auxiliaire d'une coque cylindrique soumise à une pression hydrostatique	53
3.3 Application à la cellule de gabion isolée sous poids propre	85
<b>Chapitre 4 Étude cinématique du gabion isolé sous poids propre</b>	
4.1 Rappel des travaux antérieurs	89
4.2 Construction de champs symétrisés	90
4.3 Mécanismes sans frottement remblai/substratum	92
4.4 Mécanisme sans glissement remblai/substratum	100
4.5 Prise en compte des effets hydrauliques	120
4.6 Étude cinématique du gabion isolé sous moment de renversement	132
4.7 Récapitulatif	136

<b>Chapitre 5 Étude statique de la gabionnade sous poids propre</b>	
5.1 Introduction	139
5.2 Étude en configuration initiale	144
5.3 Équilibre membranaire d'une gabionnade	159
5.4 Prise en compte de la résistance des palplanches à la flexion longitudinale	171
5.5 Récapitulatif	182
<b>Chapitre 6 Étude cinématique de la gabionnade</b>	
6.1 Travaux antérieurs	185
6.2 Étude d'un mécanisme ne faisant pas jouer l'effort ...	186
6.3 Étude d'un mécanisme avec interface lisse à la base	203
6.4 Étude cinématique avec interface frottante à la base	213
6.5 Récapitulatif	231
<b>Chapitre 7 Comparaison avec les résultats antérieurs</b>	
7.1 Comparaison avec des ouvrages réels	235
7.2 Comparaison avec des essais sur modèles réduits	247
7.3 Comparaison avec des méthodes de dimensionnement classiques	255
7.4 Récapitulatif	257
<b>Chapitre 8 Conclusions</b>	
8.1 Apports de la modélisation utilisée	259
8.2 Principaux résultats	260
8.3 Perspectives	262
<b>Annexes</b>	
Annexe A Application à un talus renforcé par une répartition surfacique de tirants	265
Annexe B Cas du cylindre appuyé ou encastré	279
Annexe C Cas de détermination de la solution exacte pour le problème du gabion isolé sous poids propre	291
Annexe D Établissement des équations d'équilibre des coques par la méthode des puissances virtuelles	303
<b>Références bibliographiques</b>	313

## *Avant-propos*

*L'objet de ce mémoire est l'application des méthodes du calcul à la rupture à l'étude de la stabilité de cellules de gabion et de gabionnades (assemblages de plusieurs cellules de gabions).*

*Ces ouvrages sont constitués d'une enceinte de palplanches métalliques remplie d'un remblai frottant. Ils sont utilisés dans des sites portuaires ou fluviaux comme soutènements ou comme batardeaux. Bien qu'utilisés depuis plus de 80 ans, leur fonctionnement mécanique n'est qu'imparfaitement compris et des accidents surviennent encore, y compris en cours de construction. Les règles de dimensionnement utilisées sont largement issues de l'expérience et non pas sur des fondements théoriques rigoureux.*

*L'emploi des méthodes fondées sur la théorie du calcul à la rupture (Salençon, 1983, 1990, 1993-b) peut contribuer à fonder le dimensionnement de ces ouvrages sur des bases rigoureuses. Des travaux antérieurs ont déjà appliqué le calcul à la rupture aux gabions. Il faut citer Dormieux et Delaurens (1991) pour l'étude d'une cellule de gabion isolée et Buhan, Dormieux et Maghous (1992) pour l'étude cinématique d'une gabionnade.*

*Le calcul à la rupture des gabions cellulaires présente plusieurs particularités :*

- géométrie authentiquement tridimensionnelle*
- modélisation mixte des éléments constitutifs (enceinte de palplanches modélisées comme une coque, matériau de remblai modélisé comme un milieu continu 3D).*

*Les travaux antérieurs utilisant le calcul à la rupture ont toujours considéré des cinématiques dans lesquelles les palplanches restaient droites. La modélisation coque des palplanches permettra notamment d'envisager des cinématiques avec des déformations en flexion des palplanches ce qui correspond à certaines observations d'accidents ou de modèles réduits à grande échelle. On peut alors concevoir de nouvelles cinématiques aboutissant à des résultats plus précis ou intégrant l'effet de la poussée d'un remblai. Nous considérerons également dans les études statiques la contribution due à la résistance à la flexion des palplanches ce qui n'était pas le cas jusqu'à maintenant.*

*Donnons maintenant le plan général de ce mémoire.*

*Un premier chapitre introductif permettra de rappeler la constitution des gabions et des gabionnades, leurs utilisations et leurs méthodes de dimensionnement.*

*Le chapitre 2 donnera les bases de la modélisation des gabions que nous utiliserons dans la suite. On précisera notamment les critères de résistance des différentes parties constitutives des gabions.*

*Le chapitre 3 donnera une étude statique de la cellule de gabion isolée prenant en compte la résistance à la flexion des palplanches. Pour mener à bien cette étude, nous procéderons à l'examen d'un problème auxiliaire de calcul à la rupture : celui d'une coque cylindrique soumise à une pression hydrostatique interne.*

*Le chapitre 4 sera consacré à l'étude cinématique de la cellule de gabion isolée. Deux cas d'interface remblai/substratum seront envisagés. Diverses cinématiques seront utilisées, soit qu'elles proviennent de la symétrisation de mécanismes par blocs, soit qu'elles soient obtenues comme solution d'une équation aux dérivées partielles.*

*Le chapitre 5 commencera l'étude de la gabionnade par l'application de la méthode statique. On envisagera cette étude dans la configuration initiale et dans une configuration déformée d'équilibre membranaire. On étendra également les résultats du chapitre 3 au cas des gabionnades (évaluation du supplément de chargement supportable dû à la résistance à la flexion des palplanches).*

*Le chapitre 6 poursuivra l'étude de la gabionnade par l'application de la méthode cinématique. On envisagera les cas de la gabionnade sous poids propre et soumise à une différence entre les niveaux d'eau interne et externe. On étudiera aussi l'effet de la présence d'un remblai externe, comme c'est le cas pour une configuration quai. Dans le cas particulier d'un remblai purement cohérent, on mettra en évidence la possibilité de mécanismes ne faisant pas jouer la résistance à l'effort normal des palplanches.*

*Le chapitre 7 confrontera certains de nos résultats avec des données provenant de l'observation d'ouvrages réels ou de modèles réduits. On comparera également avec les méthodes classiques de dimensionnement. Ce chapitre proposera aussi une modélisation pour une série de ruptures de la palplanche de raccord survenue à Umm Said (Qatar).*

*Un dernier chapitre de conclusions reprendra les principaux résultats obtenus et donnera quelques perspectives pour poursuivre l'amélioration des méthodes de dimensionnement des gabions.*

# 1. Introduction

*Dans ce chapitre introductif, nous commencerons par rappeler comment sont constituées les cellules de gabions (§1.1) et quelles sont les principales configurations géométriques des gabionnades, assemblages de cellules (§1.2). Après un aperçu historique (§1.3) et une présentation rapide des principales utilisations des gabions (§1.4), nous exposerons les méthodes classiques de dimensionnement (§1.5). Nous en viendrons ensuite à des développements plus récents sur le dimensionnement des ouvrages en gabions (§1.6). Nous terminerons par les perspectives ouvertes par le calcul à la rupture, par les travaux antérieurs appliquant le calcul à la rupture aux gabions et, enfin, par une présentation des axes et des principales parties de ce mémoire (§1.7).*

## 1.1 Constitution des cellules de gabions

### 1.1.1 La cellule de gabion

Nous nous intéresserons au comportement des gabions cellulaires. Une cellule de gabions est formée d'une enceinte cylindrique de palplanches métalliques qui est ensuite remplie d'un matériau de remblai (Figure 1-1).

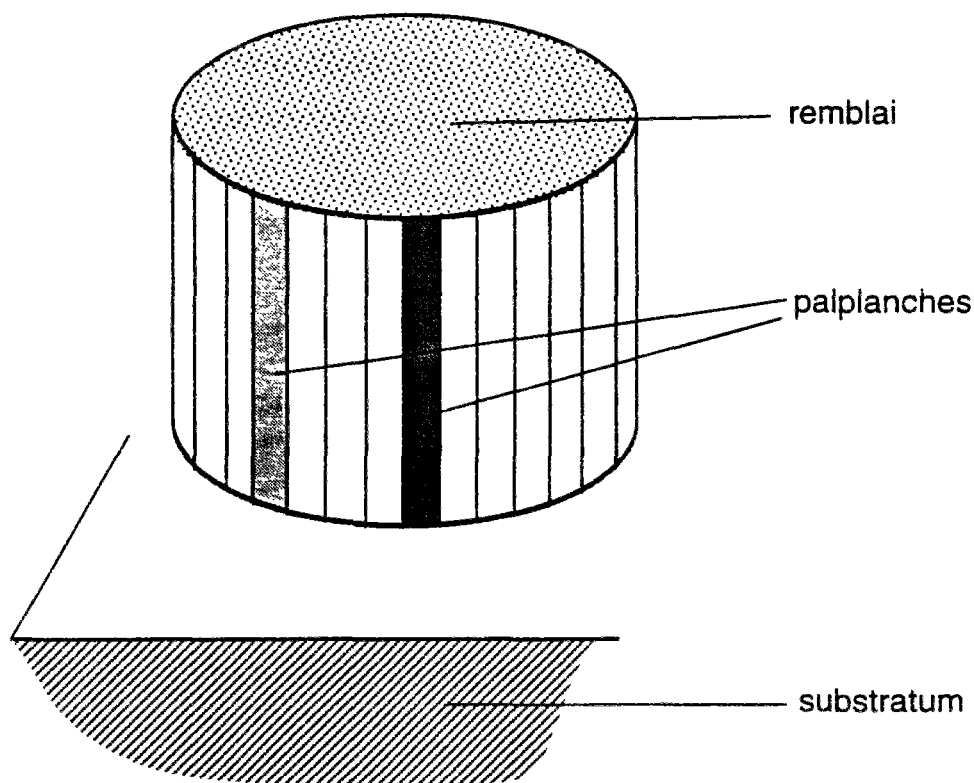


Figure 1-1 Constitution d'une cellule de gabion

Les palplanches sont enclenchées les unes dans les autres par leurs serrures et forment ainsi une enceinte continue capable de résister aux efforts d'éclatement dus à la poussée du remblai intérieur.

L'enceinte cylindrique de palplanches peut reposer sur un substratum rocheux ou bien pénétrer dans un sol avec une certaine fiche (Figure 1-2).

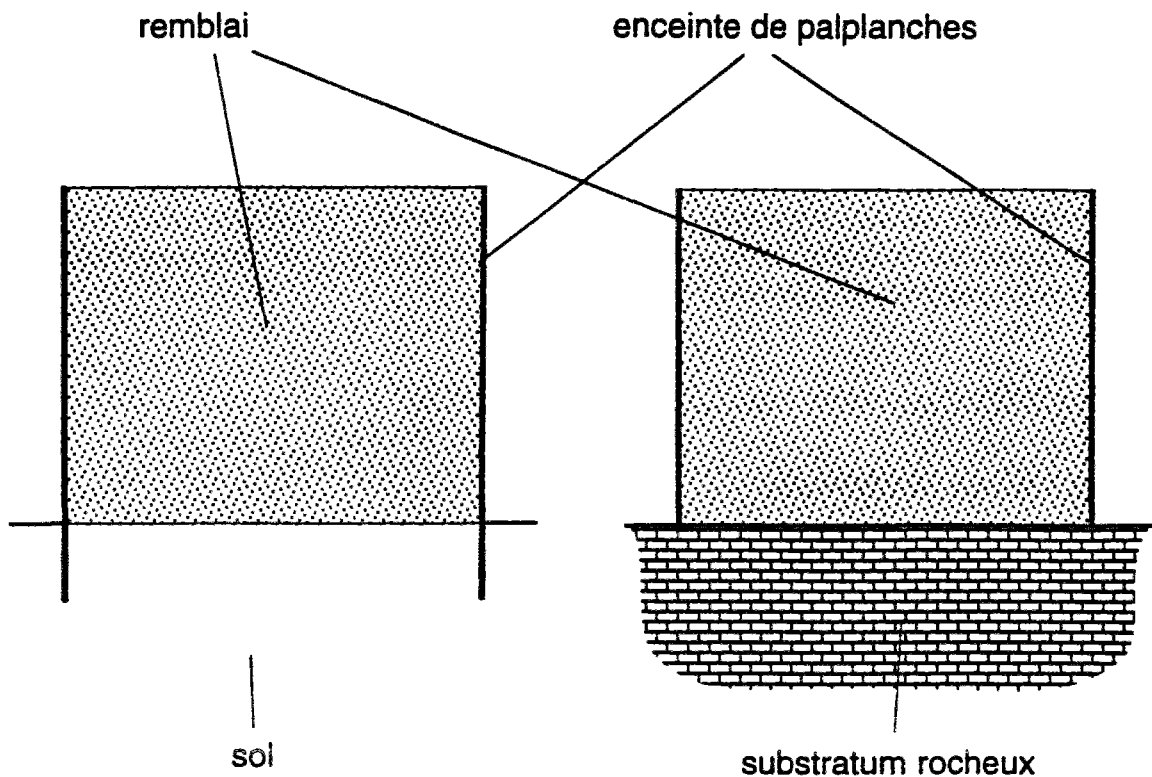


Figure 1-2 Gabion fondé sur le sol ou sur le rocher

### 1.1.2 Type de palplanches

On distingue parmi les palplanches en acier deux types : les palplanches à module et les palplanches plates. Les palplanches utilisées pour la construction des cellules de gabions sont des palplanches plates. Elles se caractérisent par une très grande résistance au dégrafage alors que leur module de résistance à la flexion est faible à cause de leur profil mince.

Pour obtenir une forte résistance au dégrafage, on utilise des serrures spéciales (Figure 1-3).

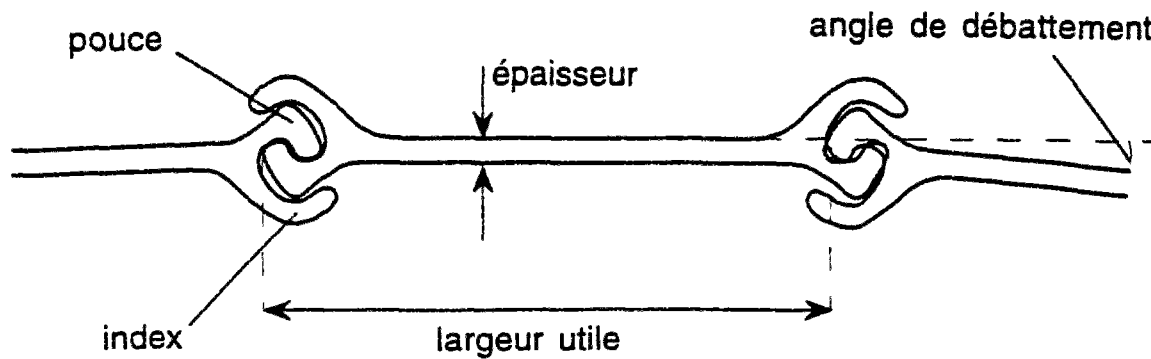


Figure 1-3 Palplanches plates : coupe transversale

Les largeurs utiles (également appelées largeurs nominales) sont de l'ordre de 50 cm. L'épaisseur peut aller couramment de 9,5 mm à 12,7 mm. La géométrie des serrures autorise un certain décalage angulaire d'une palplanche à l'autre permettant ainsi de fermer les cellules de gabion. Le débattement angulaire admissible est de l'ordre de 4° à 12°. Diverses nuances d'acier peuvent être utilisées.

L'augmentation de la résistance des serrures de palplanches à la traction a été un des moteurs de l'évolution dans l'utilisation des gabions (Carle, 1970).

### 1.1.3 Construction d'une cellule de gabion

Le battage des palplanches nécessite des précautions spéciales pour pouvoir refermer la cellule sans difficultés. Pour cela, on utilise des gabarits permettant de guider les palplanches afin de garantir la précision de leur positionnement (Figure 1-4).



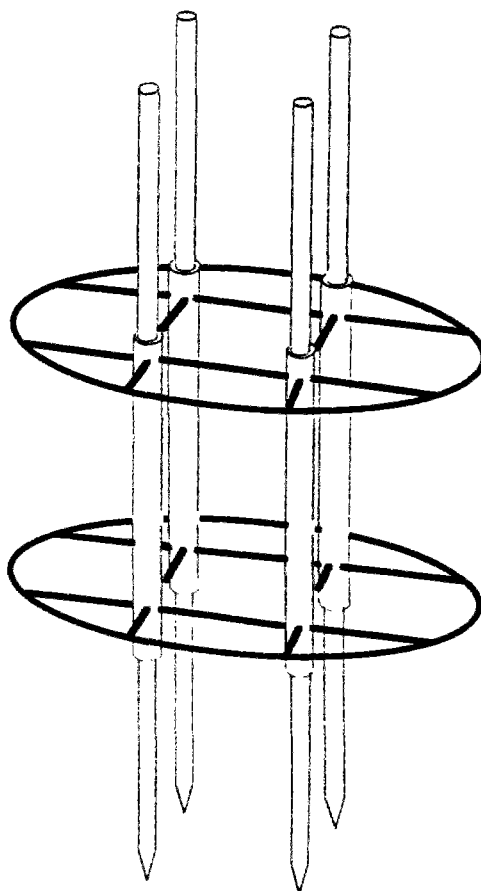


Figure 1-4 Type de gabarit pour gabion (d'après TESPA, 1993)

On ne commence à battre avec effort que lorsque la cellule de gabion est fermée. On cherche aussi à éviter le risque de dégrafage des palplanches en cours de battage, en évitant des fiches trop importantes, des efforts de battage trop importants, en limitant la différence d'avancement de battage entre deux palplanches adjacentes et en pratiquant un battage en « touches de piano ».

On trouve un exposé plus complet de ces précautions dans :

- la notice du STCPMVN (Service Technique Central des Ports Maritimes et des Voies Navigables) "Conception et calcul des quais en gabions de palplanches métalliques plates" (Pernier, 1980)
- et dans la notice du TESPA (Technical European Sheet Piling Association) intitulée "Mise en œuvre des palplanches en acier" (1993).

Signalons également des informations sur la préfabrication de l'enceinte des cellules (Roth, 1987) et la revue effectuée par Patterson (1970) sur les techniques d'installation. En cas de courant important, il peut être nécessaire d'utiliser des déflecteurs lors de la mise en place des palplanches (Swatek, 1967). Les imprécisions de positionnement des cellules posent des problèmes spécifiques lors de la fermeture des arcs de raccord (Swatek, 1970).

## 1.2 Géométrie des gabionnades

### 1.2.1 Géométrie en plan

Les cellules de gabions sont rarement utilisées isolément. Elles sont donc en général reliées les unes aux autres, constituant ainsi une gabionnade.

Les types de gabionnades les plus répandues sont les gabions circulaires (Figure 1-5) et les gabions cloisonnés (Figure 1-6).

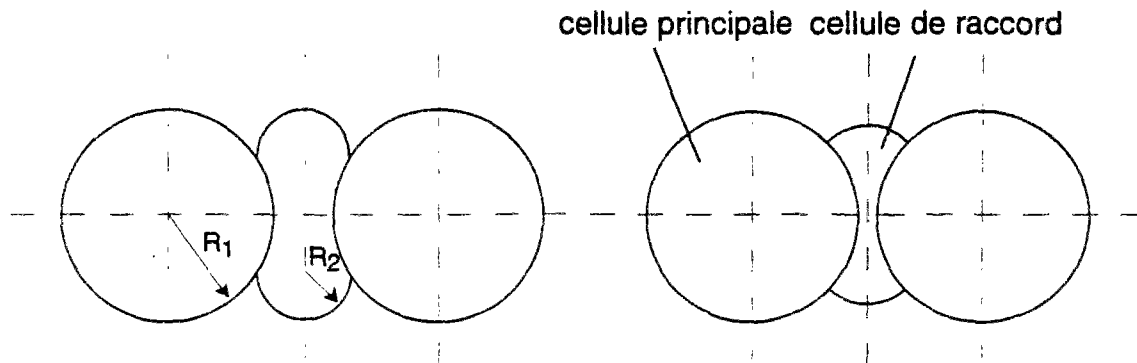


Figure 1-5 Exemples de gabions circulaires

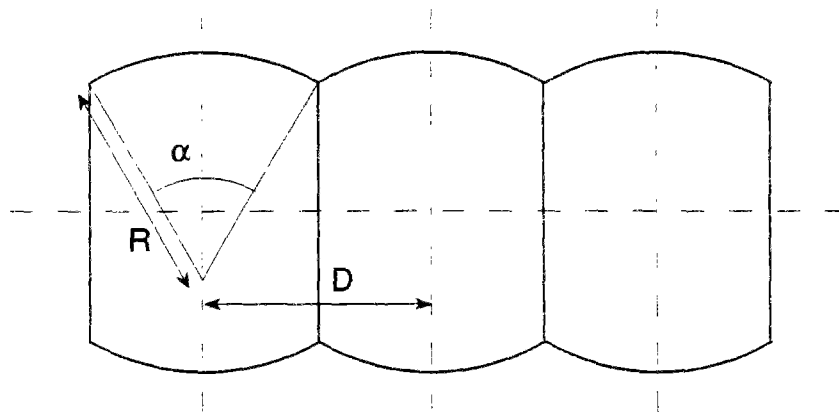


Figure 1-6 Exemple de gabionnade cloisonnée

La forme géométrique en plan dépend de plusieurs paramètres, ce qui donne une assez grande variété de géométries possibles aux gabions circulaires. Dans le cas d'un quai, l'arc de raccord arrière peut parfois être supprimé (Figure 1-7).

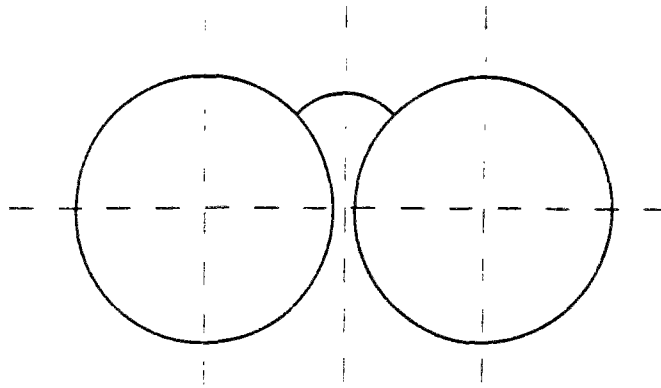


Figure 1-7 Gabionnade avec suppression de l'arc de raccord arrière

La gabionnade cloisonnée nécessite des précautions lors de la mise en place du remblai : pour ne pas déformer la cloison commune entre deux cellules, il faut remplir les différentes cellules simultanément en évitant une différence trop importante de hauteur de remplissage entre deux cellules adjacentes.

L'angle  $\alpha$  est typiquement de  $120^\circ$ , le rapport entre R et D pouvant varier.

La gabionnade en trèfle est citée classiquement, même si l'amélioration des performances des palplanches en a diminué l'intérêt.

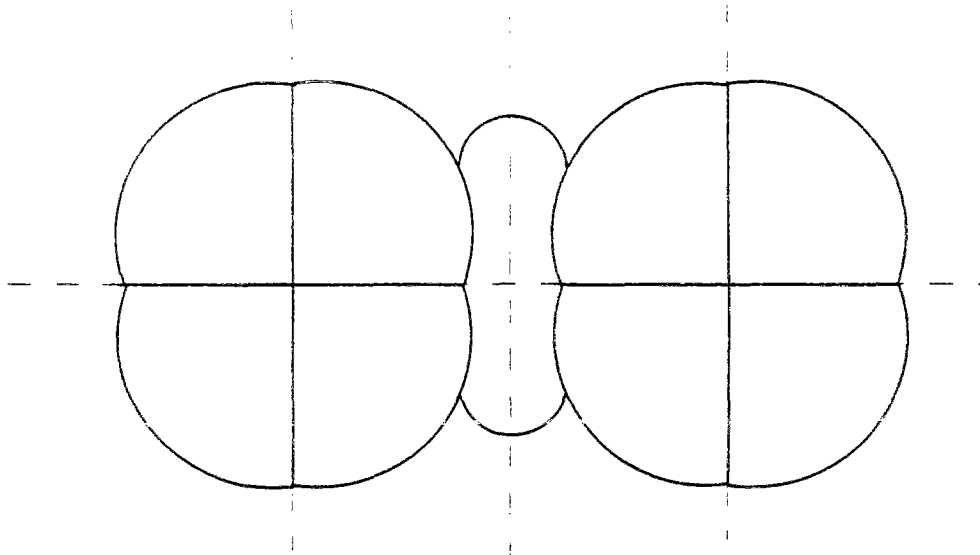


Figure 1-8 Exemple de gabionnade en « trèfle »

D'autres géométries, variantes des gabions circulaires ou intermédiaires entre les gabions circulaires et les gabions cloisonnés peuvent parfois être utilisés : les gabions en écaille (Figure 1-9) et les gabions à cloisons courbes (Figure 1-10)(Cushing et Moline, 1975).

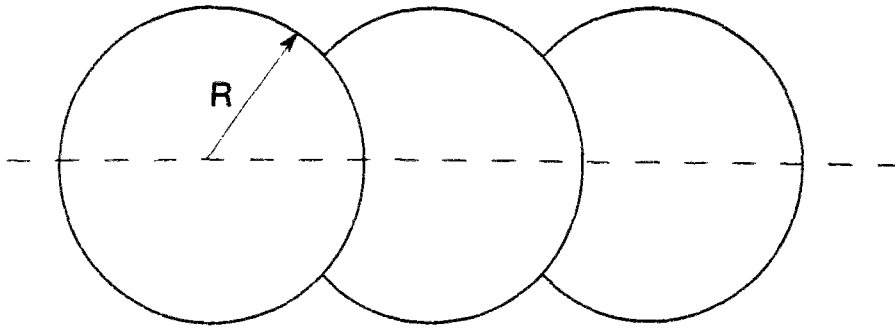


Figure 1-9 Gabionnade en écailles

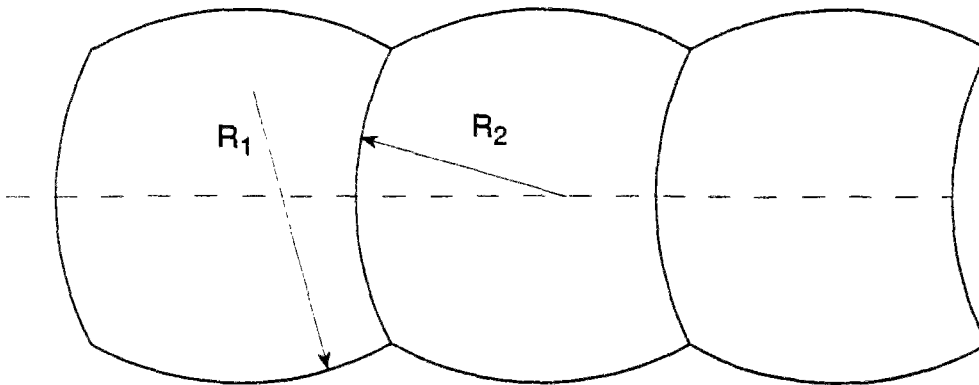


Figure 1-10 Gabionnade à cloisons courbes

Citons également des gabionnades plus complexes réalisées en plusieurs temps ou des structures mixtes alliant rideau de palplanches et gabionnade (comme c'est le cas d'un ouvrage pour le barrage et l'écluse 6 sur la rivière Arkansas (Swatek, 1967)).

Signalons enfin la possibilité, pour certaines applications, de construire une gabionnade par simple juxtaposition de cellules circulaires (Figure 1-11).

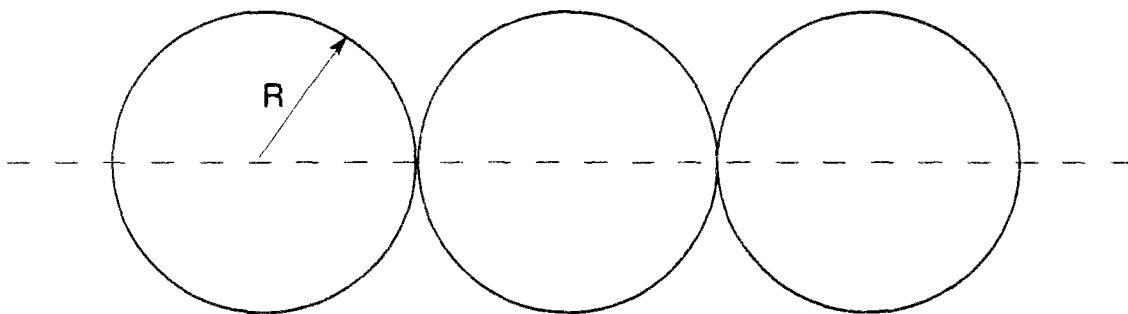


Figure 1-11 Gabionnade constituée de cellules juxtaposées

Certains auteurs ont proposé diverses innovations, comme le renforcement d'un remblai aux caractéristiques insuffisantes par des colonnes ballastées (Goughnour et Jones, 1989), ou l'utilisation de palplanches plus larges diminuant le nombre de connexion ou encore l'utilisation d'éléments préfabriqués en béton précontraint (Jahren et Hancher, 1989) ou l'utilisation d'enveloppe en polymères dans des configurations du type « cellules juxtaposées » (Croskey, 1993).

### 1.2.2 Géométrie en élévation

L'expérience montre que dans la zone amont d'un quai, la tension que doit reprendre le rideau de palplanches est plus faible. Pour économiser les palplanches, on peut alors utiliser éventuellement des palplanches de caractéristiques mécaniques inférieures ou diminuer la longueur des palplanches. Cette réduction peut se faire par le haut, par le bas ou par les deux.

### 1.3 Aperçu historique

Les premières palplanches utilisées en génie civil étaient en bois et ont été employées dans des travaux en site humide afin notamment d'empêcher les circulations d'eau sous les ouvrages (Belidor, 1750). Ces palplanches pouvaient éventuellement s'assembler par rainures et languettes.

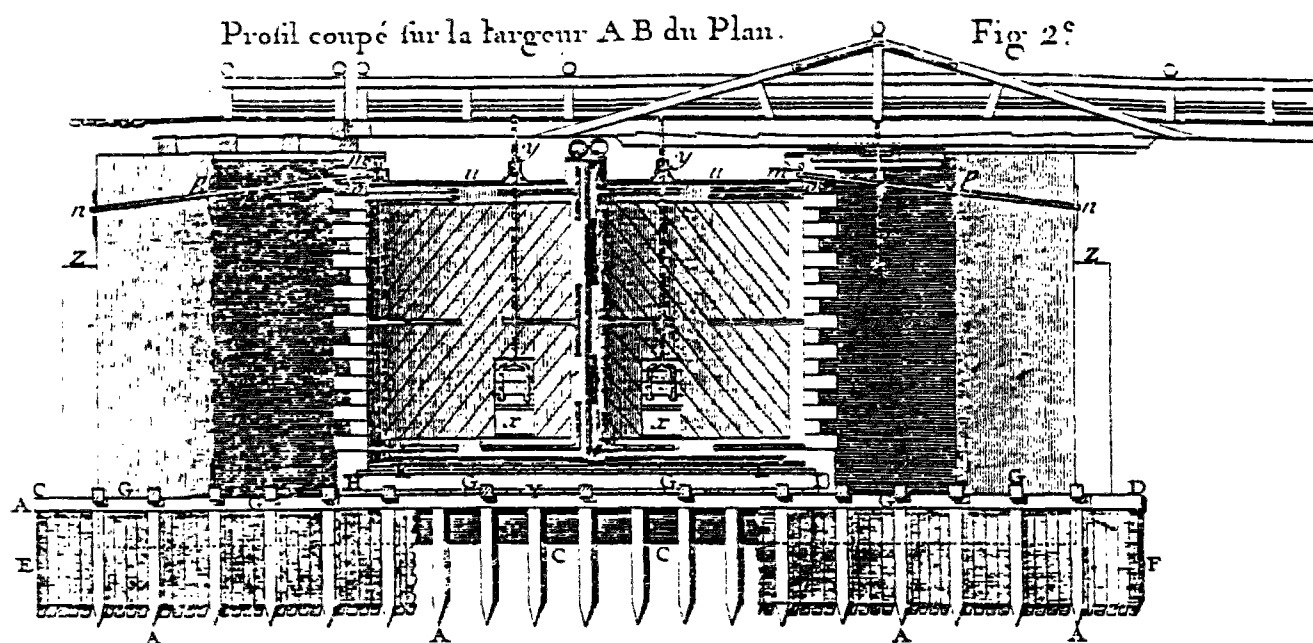


Figure 1-12 Exemple d'utilisation de palplanches en bois (Belidor, 1750)

Les premières palplanches métalliques remplaçant les palplanches en bois remontent à 1902 (Roth, 1987) et ont été inventées par Larssen, ingénieur à Brême et brevetées le 4 janvier 1904. Il s'agissait de palplanches à module et non de palplanches plates.

Le premier batardeau en gabions cellulaires a été construit à Black Rock Harbor près de Buffalo, New York en 1908. Ce premier ouvrage a subi d'importantes déformations imputables à sa conception géométrique (Figure 1-13). En 1910, ce premier essai a été suivi par la construction d'un batardeau autour de l'épave du navire Maine dans le port de La Havane.

13). En 1910, ce premier essai a été suivi par la construction d'un batardeau autour de l'épave du navire Maine dans le port de La Havane.

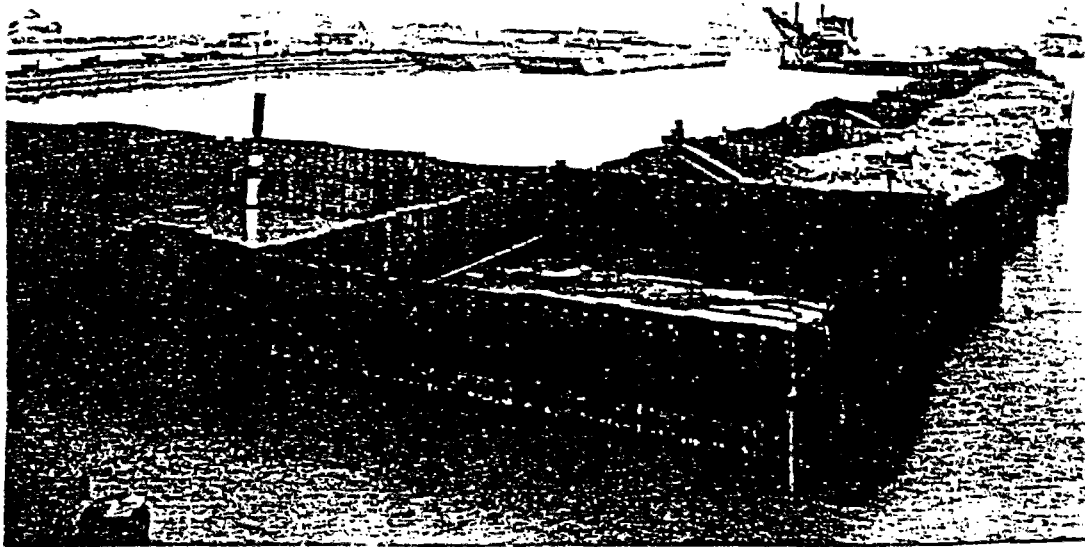


Figure 1-13 Batardeau au port de Black Rock (Dismuke, 1970)

Selon Roth, les palplanches plates proprement dites font leur apparition en 1939, au moins en Europe. Elles sont conçues pour résister à des efforts de traction, ce qui se traduit par une conception adaptée des serrures.

Le mode de fabrication des raccords entre cellules a aussi évolué. La conception classique est d'utiliser une palplanche de la cellule principale sur laquelle on assemble une demi-palplanche, avant battage. Les assemblages ont été faits d'abord par rivetage et maintenant par soudage.

D'autres dispositifs peuvent être employés comme une connexion en Y constituée de trois demi-palplanches soudées sur une barre ronde ou l'utilisation d'un élément de raccord spécial extrudé (Roth, 1987).

Les performances des ouvrages ont augmentées avec notamment l'augmentation des performances des palplanches et des techniques de battage. En ce qui concerne les batardeaux, Swatek (1967) a retracé l'évolution des performances jusqu'en 1967.

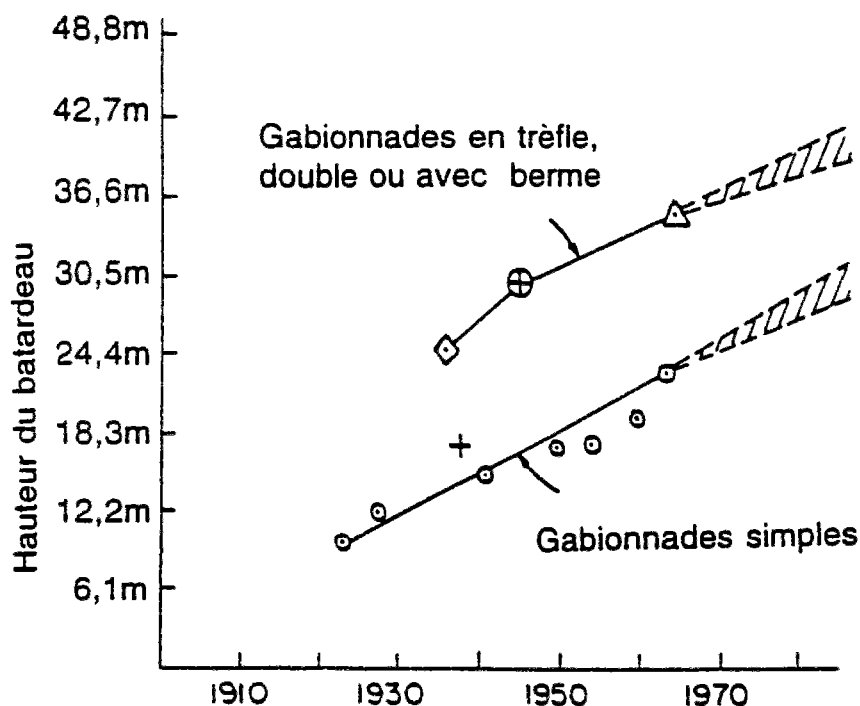


Figure 1-14 Evolution des performances des batardeaux en gabions d'après Swatek (1967)

## 1.4 Utilisation des gabions cellulaires

Les gabions sont utilisés dans le cas de travaux en milieu maritime ou fluvial. Ils servent essentiellement comme moyen de soutènement pour de l'eau, des terres ou les deux conjointement. Ils peuvent servir d'ouvrages provisoires (c'était là leur utilisation initiale) ou permanents.

Leur utilisation se justifie dans le cas de profondeur d'eau ou de dénivellation importante, et en particulier quand la réalisation d'ancrages serait impossible ou coûteuse. C'est en effet l'un des avantages des gabionnades d'être autostables. Certains restreignent leur utilisation au cas de fondations sur un bon sol ou sur le rocher ; c'est le cas de l'EAU 1990. D'autres envisagent néanmoins le cas de sols de fondation médiocres (Design Manual, 1986). Ils peuvent aussi être utilisés quand l'espace disponible est réduit ou que l'on souhaite avoir une paroi verticale.

Les gabions isolés peuvent servir de :

- ducs d'Albe,
- de piles pour un pont.

Les gabionnades ont des utilisations variées :

- réalisation de batardeaux pour la constructions de barrages, d'écluses,
- murs de quais,
- jetées et brise-lames
- constitution d'une cale sèche,

- soutènement d'une trémie d'entrée d'un tunnel sous-fluvial en évitant le rabattement de la nappe (Fisher, 1971)
- limitation d'une zone de dépôt de matériaux de dragage (Tanal, 1984),
- ouvrage de protection contre le choc de navires (pont de Normandie).

## **1.5 Les méthodes de dimensionnement classiques**

### **1.5.1 Présentation de la bibliographie**

Ces méthodes ont donné lieu à une abondante littérature avec probablement un certain cloisonnement de part et d'autre de l'Atlantique. Pour Roth (1987), ingénieur allemand, la première méthode classique concernant les ouvrages en palplanches est due à Blum (1931). De l'autre côté de l'Atlantique, on considère que les travaux fondateurs concernant les doubles rideaux de palplanches et les gabions cellulaires sont ceux de Pennoyer (1934) et, plus encore, ceux de Terzaghi (1945). Néanmoins le développement de l'utilisation des gabions aux Etats-Unis depuis 1910 avait déjà nécessité le développement de méthodes de dimensionnement d'après l'expérience ainsi qu'un certain nombre de vérifications (glissement, renversement, tension dans les serrures) comme le souligne Lautz (1945). Les travaux des danois Brinch-Hansen (1953) et Ovesen (1962) sont par contre peu utilisés aux Etats-Unis ; par exemple, ils sont juste cités pour mémoire dans le livre de Bowles (1977). Les travaux japonais semblent également peu diffusés en Europe et Etats-Unis alors que des pratiques différentes de dimensionnement ont cours au Japon (Ghali, 1981).

Cette littérature comprend des articles proposant de nouvelles méthodes de dimensionnement basées sur des conceptions théoriques et/ou sur des observations ou des essais. Nous examinerons plus précisément au chapitre 6 les résultats de ces observations et essais et nous nous limiterons ici aux articles fondés plutôt sur des considérations théoriques (même si la séparation n'est pas toujours nette entre ces deux catégories). Outre ceux déjà cités, il faut ajouter dès maintenant : Cummings (1957), Esrig (1970), Shroeder et Maitland (1979) ainsi que les nombreuses discussions auxquelles ont donné lieu les articles de Terzaghi, Cummings.

Il faut citer également un certain nombre d'articles qui font la revue critique des méthodes existantes : Lacroix et al. (1970), Belz (1970), Cassan (1974), Schroeder (1990). Des méthodes complètes de dimensionnement ont également été publiées quelles aient valeur ou non de règlement : TVA (1957), Pernier (1980), Design Manual (1986), Hoüy (1986), EAU 1990. On peut ajouter encore des ouvrages comme par exemple ceux de Caquot et Kerisel (1966), Bowles (1977) et de Pilot (1979).

Notons enfin que notre revue des méthodes de dimensionnement classiques ne peut prétendre à l'exhaustivité.

### **1.5.2 Principes généraux de ces méthodes classiques**

L'étude de la stabilité des gabions repose classiquement sur la considération de plusieurs modes de rupture. Pour chacun de ces modes, on définit un coefficient de



sécurité. On distingue de manière un peu arbitraire la stabilité interne et la stabilité externe. La stabilité interne dépend des caractéristiques de résistance des matériaux du gabion alors que la stabilité externe n'en dépend pas.

On considère habituellement deux modes de rupture interne :

- la rupture par éclatement, la tension dans les serrures des palplanches due à la pression exercée par le remblai interne excédant la résistance de ces serrures,
- la rupture sous cisaillement interne, le remblai interne ne pouvant supporter les efforts internes dus au moment des forces extérieures.

Notre étude sera centrée sur ces modes de rupture interne.

On considère également de manière usuelle trois modes de rupture externe (qualifiée de méthode du monolithe par Cassan (1974)) :

- le glissement sur la base du gabion
- le renversement du gabion
- le poinçonnement de la fondation

Enfin, il faut vérifier que la circulation de l'eau dans l'ouvrage ou sous l'ouvrage ne risque pas de créer de désordres.

D'une manière générale, ces méthodes classiques utilisent largement l'analogie entre une gabionnade et un double rideau de palplanches de largeur équivalente (c'est à dire ayant la même surface moyenne par unité de longueur). Ceci permet d'escamoter la difficulté de la structure tridimensionnelle d'une gabionnade en étudiant à la place un problème plan.

### 1.5.3 Etude du glissement

L'étude du glissement figurait déjà dans l'article de Pennoyer (1934), dans le cas d'un gabion fondé sur le roc ou dans un sol frottant. Terzaghi(1945) a apporté une correction dans le cas du gabion fondé sur le roc en utilisant le poids effectif  $W'$  et non plus le poids  $W$  dans la condition  $P \geq fW$ , avec  $P$  la force extérieure horizontale et  $f$  le coefficient de frottement entre le remblai et le roc.

Dans le cas du gabion fondé sur un sol frottant, Pennoyer considère comme force résistante la butée des terrains situés devant la fiche des palplanches, négligeant le cisaillement à l'interface entre le remblai interne et le sol de fondation. Les méthodes ultérieures prendront en compte cette résistance à l'interface.

### 1.5.4 Etude du renversement

La condition demandée par Pennoyer (1934) est l'application de la règle du tiers central : la résultante de la force extérieure et du poids propre du gabion doit passer

par le tiers central de l'interface entre le gabion et le sol de soubassement. Cette règle a été critiquée par Terzaghi (1945) ; une polémique s'en suivit (Pennoyer, 1945). Notons que cette règle figure encore avec des réserves dans le livre de Bowles (1977) alors qu'elle est qualifiée d'entièrement fautive par Belz (1970), de recette de cuisine par Cassan (1974).

La règle du tiers central donne un coefficient de sécurité de 3 par rapport au moment maximal. Ce moment maximal est défini comme le moment des forces extérieures qui fait tourner le gabion considéré comme un corps rigide autour du pied de la palplanche aval (Terzaghi, 1945). Le Design Manual (1986) demande un coefficient de sécurité de 3 à 3,5 par rapport à ce moment maximal; de même pour Lacroix et al. (1970). Ce coefficient de sécurité élevé est justifié par le fait que la rupture intervient avant que le renversement d'un corps supposé rigide ne soit possible comme le souligne Cummings (1957). Ce même auteur signale la ruine de gabions qui respectaient la règle du tiers central et donc avait un coefficient de sécurité de trois par rapport à ce moment de renversement ; ces accidents sont notamment dus à l'emploi de remblais argileux.

Enfin, Schroeder et Maitland (1979) estiment que la vérification au renversement est un exercice inutile qu'il faut arrêter.

En conclusion, la vérification au renversement tend à être remplacée par une vérification de la résistance de la cellule de gabion sous l'effet du moment des forces extérieures, même si l'évolution est lente. Ces vérifications, que nous allons voir après, sont dites modes de rupture par cisaillement interne.

### 1.5.5 Tension dans les serrures de la cellule principale

On considère la cellule principale après remplissage. On évalue la tension sur la paroi aval par la formule des chaudronniers :

$$T = pR \quad (1-1)$$

La question est : comment déterminer la pression  $p$  ? Les réponses sont diverses : elles se différencient par un choix différent du coefficient de poussée des terres et par le choix de la cote de calcul de la tension maximale. Le choix de cette cote de calcul est influencé par la prise en compte du lieu de gonflement maximal de la cellule après remplissage.

Le tableau ci-après montre la diversité existante des recommandations sur ce sujet, selon les auteurs.

auteurs	cote de calcul	coefficient de poussée
Pennoyer (1934)	au niveau du fond de fouille	$\tan^2(\pi/4 - \phi/2)$ ?
Terzaghi (1945)	au niveau du fond de fouille	0,4
Lacroix et al. (1970)	H/4 sur roc, hauteur plus élevée à partir de l'extrémité inférieure s'il y a une fiche	0,4 (pour calculer la tension maximale des serrures)
Hoüy (1986)	H/3	0,6 en fin de remblaiement 0,4 en service pour le remblaiement par voie hydraulique $K_a = \tan^2(\pi/4 - \phi/2)$ pour un remblaiement par voie sèche $(K_0 + K_a)/2$ pour un terrain en place
Design Manual (1986)	H/4 à partir du niveau du fond de fouille	0,4
EAU 1990	niveau de la fouille	$K_0 = 1 - \sin \phi$

Tableau 1-1 Paramètres pris en compte pour la détermination de la tension maximale

On voit à la lecture du tableau précédent que la question posée n'a pas reçu jusqu'à maintenant de réponse univoque. Chen (1970) signale la présence d'autres efforts que la tension dans les raccords, même dans le cas axisymétrique, comme les efforts de flexion longitudinaux qui peuvent atteindre des valeurs élevées.

### 1.5.6 Prise en compte de l'effet des arcs de raccord sur la tension des serrures

La formule des chaudronniers ne peut plus être appliquée près du raccord. L'arc de raccord après remplissage de la cellule de raccord va exercer une traction sur l'enceinte de la cellule principale qui va perturber l'état d'équilibre initial. Depuis longtemps, la difficulté à prendre en compte cet effet a été soulignée par divers auteurs (contraintes locales induites dans le raccord (Pennoyer, 1934), changement dans la tension (Tsagaris, 1945)).

La TVA suggère de prendre en compte la formule suivante dite de la sécante pour la tension maximale dans les serrures qui se situerait au niveau du raccord :

$$T = \frac{pL}{\cos \alpha} \quad (1-2)$$

où la longueur  $L$  et l'angle  $\alpha$  sont définis comme le montre la figure ci-après.

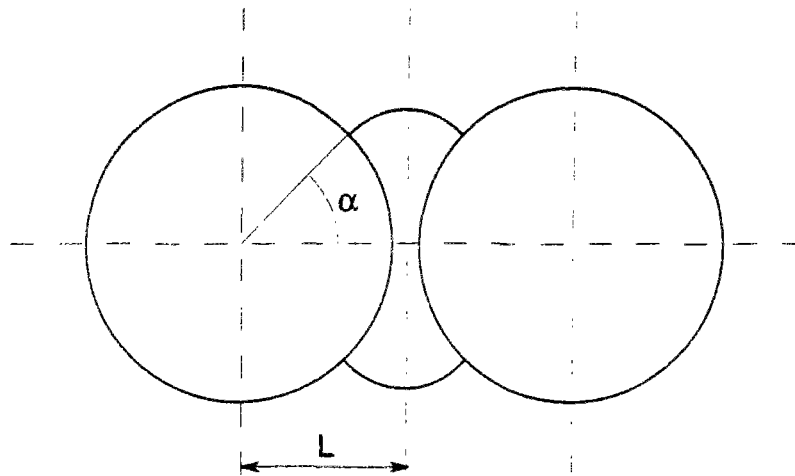


Figure 1-15 Paramètres géométriques pour la formule de la TVA

Une formule attribuée à Swatek<sup>1</sup> donne :

$$T = pL \quad (1-3)$$

Les travaux de Rossow (1984) ont apporté un certain fondement théorique à la formule ci-dessus. Il a proposé une variante de cette formule établie sur une configuration déformée. Cette variante donne le même résultat que la formule de Swatek si les pressions exercées par le remblai sur l'arc principal et sur l'arc secondaire sont les mêmes. Sinon la formule de Rossow est obtenue en remplaçant dans la formule de Swatek  $p$  par la moyenne pondérée des pressions exercées sur chaque arc. Le facteur de pondération est la longueur de la projection de chaque arc sur le plan vertical passant par les axes de symétrie des cellules principales ; ces longueurs sont déterminées en configuration déformée d'équilibre membranaire.

Lacroix et al. (1970) déconseillent l'utilisation de la formule de la TVA et considèrent que l'effet de l'arc de raccord est pris en compte de manière forfaitaire dans les coefficients de poussée qu'ils ont préconisés. Schroeder (1987-a) a signalé la diversité des observations sur le terrain quant à l'influence du remblaiement des cellules de raccord. Hoüy (1986) recommande de considérer comme tension pour la vérification des raccords, la somme vectorielle des tractions dans la cellule et dans l'arc de raccord.

Il est de toute manière souhaitable de réduire l'effet de l'arc de raccord sur la cellule principale. A cet effet, la plupart des auteurs s'accordent pour recommander que l'espace entre les cellules principales soit réduit et que le rayon des cellules de raccord soit petit quitte à utiliser des palplanches courbées (EAU 1990). Un consensus s'est dégagé pour dire que les raccords en Y (à 30°) sont préférables aux

---

<sup>1</sup> Elle apparaît notamment dans Swatek (1970) sous le nom de méthode du « midplane ». Il faut remarquer que dans cette référence, l'auteur considère que c'est la formule de la TVA qui est probablement la meilleure pour prendre en compte l'effet des arcs de raccord.

raccords en T qui restent néanmoins admis (Swatek, 1967), (Lacroix et al., 1970), (Swatek, 1970). Pour Hoüy (1986), les raccords en T doivent être exclus.

### **1.5.7 Modes du rupture dits par cisaillement interne**

La plupart des théories sont basées sur la considération d'une ligne de rupture possible à l'intérieur de la cellule de gabion (Tableau 1-2).

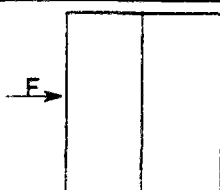
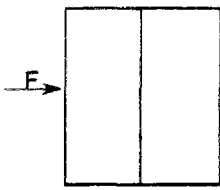
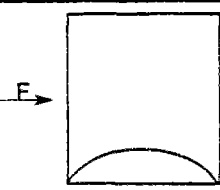
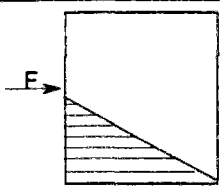
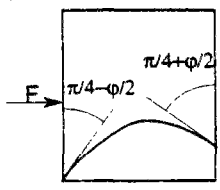
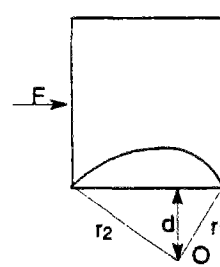
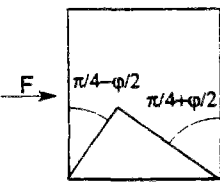
nom de la méthode	ligne de rupture	moment extrême par unité de longueur
Terzaghi (1945)		$\frac{1}{3} \gamma b H^2 \left( K \tan \varphi + K_f \frac{R}{L} \right)$ avec $K = 0,4$
Terzaghi modifiée par Krynine (1945)		$\frac{1}{3} \gamma b H^2 \left( K \tan \varphi + K_f \frac{R}{L} \right)$ avec $K = \frac{\cos^2 \varphi}{2 - \cos^2 \varphi}$
Brinch-Hansen (1953)	 (arc de cercle)	
Cummings (1957)		$\gamma \left( \frac{1}{2} b f H^2 \tan^2(\pi/4 - \varphi/2) + b^3 \left( \frac{\tan^2 \varphi}{2} - \frac{\tan^3 \varphi}{6} \right) \right)$
Schneebeli et Cavaillé-Coll (1957)	 (arc de cercle)	$\approx \frac{\gamma b H^2}{6} 0,03 \varphi$
Brinch-Hansen modifiée par Ovesen (1962)	 (spirale logarithmique)	= moment du poids des terrains situés au dessus de la spirale par rapport au centre de la spirale 0.
Normes japonaises de 1972 citées par Ghali (1981)		

Tableau 1-2 Présentation des principales méthodes de calcul du moment maximal

Dans le tableau précédent  $f$  désigne le coefficient de frottement dans les serrures,  $b$  la largeur équivalente de la gabionnade.

La vérification de la résistance du remblai au cisaillement interne a été évoquée déjà par Pennoyer (1934). Il envisage une répartition de l'effort de cisaillement issu de la théorie usuelle des poutres. Envisageant la possibilité que le remblai soit constitué de couches de résistances différentes, il recommande une vérification de la résistance pour chaque point de la « ligne centrale ».

Les méthodes présentées dans le tableau précédent connaissent un certain nombre de variantes : Esrig(1970) a présenté une modification de la méthode de Terzaghi, Albert et al. (1972) ont proposé une variante de la méthode de Schneebeli, Hoüy (1986) a donné une méthode dérivée de celle de Brinch-Hansen.

Le nombre même des approches présentées fait penser qu'aucune méthode n'est parfaitement satisfaisante.

Examinons de manière plus détaillée la méthode de Terzaghi.

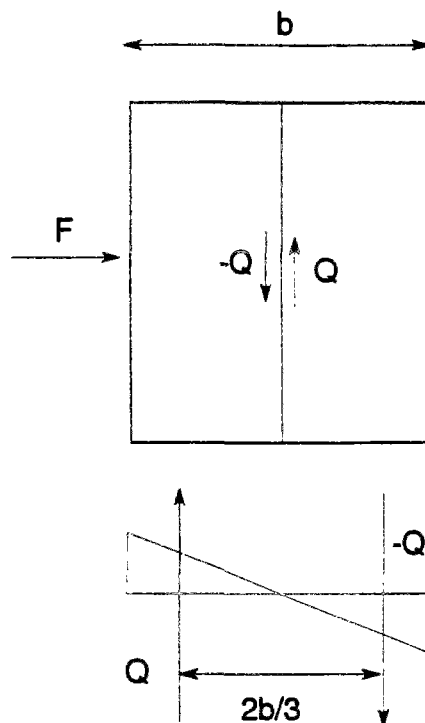


Figure 1-16 La méthode de Terzaghi

On pose que la force verticale exercée par les blocs entre eux vaut  $Q$ . On écrit l'équilibre en forces verticales de chaque bloc. On en déduit que le substratum, outre le poids de chaque bloc doit exercer une force  $\pm Q$  sur chaque bloc.

On suppose que les efforts exercés par le remblai sur le substratum, outre une pression uniforme équilibrant le poids, consistent en une répartition triangulaire

(Figure 1-16). Ceci permet de déterminer la relation entre le moment repris par la gabionnade et la force  $Q$ . Cette relation est :  $M=2bQ/3$ .

Nous sommes pour l'instant dans une démarche statique où l'on cherche une répartition de forces satisfaisant à la fois les conditions d'équilibre et les critères de résistance.

Le critère de Coulomb donne alors que la force  $Q$  est inférieure ou égale à  $\tan\phi F'$  avec  $F'$  la force horizontale qu'exercent les deux blocs l'un sur l'autre. La détermination de  $F'$  s'avère impossible par les méthodes envisagées par Terzaghi, comme il le constate lui-même. Celui-ci est amené, faute de mieux, à proposer un coefficient de poussée des terres empirique pour déterminer  $F'$ .

S'agissant d'une méthode cherchant à déterminer le chargement extrême, il est intéressant de situer la démarche de Terzaghi par rapport aux méthodes rigoureuses du calcul à la rupture (Salençon, 1983). La méthode statique par l'intérieur n'a pas été menée jusqu'au bout : on n'a pas construit de champ de contraintes partout dans le remblai, ni même écrit l'équilibre complet de chacun des deux blocs. La méthode statique par l'extérieur n'a pas non plus été conduite à terme : on a pas exhibé un moment  $M$  tel qu'on ne puisse pas trouver  $Q$  l'équilibrant.

Enfin, la ligne de rupture envisagée ne permet pas de construire de manière évidente une cinématique pertinente pour un matériau de remblai frottant ; une telle construction est d'ailleurs tout à fait étrangère à la démarche de Terzaghi.

Rappelons de plus que tout le raisonnement est construit en fait sur le cas d'un double rideau supposé équivalent à une gabionnade.

Nous n'examinerons pas en détail les autres méthodes reposant sur des raisonnements analogues. En revanche, nous insisterons sur le fait que la méthode de Brinch-Hansen modifiée représente un cas à part. En effet, elle peut être interprétée comme une cinématique pertinente pour le critère de Coulomb, au moins dans le cas d'un double rideau (et non d'une gabionnade circulaire). Ceci a été reconnu par Buhan et al. (1992). De nombreux auteurs considèrent, de manière erronée, que la méthode de Brinch-Hansen modifiée est une simplification de la méthode de Brinch-Hansen faite au détriment de la rigueur. C'est notamment l'opinion de Lacroix et al. (1970) ou de Ghali (1981).

### 1.5.8 Condition de non pénétration des palplanches aval

Signalons encore une vérification recommandée notamment par Terzaghi (1945), par Lacroix et al. (1970) et reprise dans un programme informatique récent (Rossow et Mosher, 1992) : le risque d'enfoncement des palplanches aval dans le sol de fondation sous l'effet des forces appliquées par le remblai sur ces palplanches.

Cette pénétration aurait en particulier pour conséquence la perte de remblai par le haut du gabion. Ce risque est déterminé en évaluant les forces de frottement exercées sur les palplanches par le remblai interne ainsi que par le sol de fondation



du côté interne et externe. Terzaghi en conclut que pour un gabion fondé sur du sable la profondeur de la fiche doit être égale au  $2/3$  de la hauteur libre du gabion.

Il est intéressant de confronter cette vérification avec les méthodes du calcul à la rupture. En particulier, la construction d'un mécanisme cinématique correspondant à un tel mode de rupture paraît impossible. Si on applique la méthode cinématique au système réduit à l'enceinte de palplanches, le remblai et le sol de fondation restant immobiles, les forces de frottement dues au remblai sont des forces résistantes développées à l'interface et non des forces motrices lesquelles se réduisent au poids propre des palplanches. Pour concevoir un mécanisme faisant pénétrer les palplanches, il faudrait considérer un système plus vaste intégrant le remblai avec un champ cinématique non nul dans une partie du remblai.

La réalité de ce risque paraît donc tout à fait douteuse, au moins dans la formulation actuelle du mode de rupture considéré. Aucun accident correspondant à ce mode de ruine n'a d'ailleurs été signalé ni par Lacroix et al. (1970) ni par Jahren et Hancher (1989).

### 1.5.9 Utilisation de l'informatique

Un programme de calcul destiné à été développé dans un centre d'étude des Etats-Unis ( U. S. Army Engineer Waterways Experiment Station ). Ce programme a été appelé CCELL. Il est décrit dans un article de Rossow et Mosher (1992). Ce programme a été utilisé notamment pour la conception de l'extension d'un quai au terminal du port de Richmond (Hubler, 1995).

Ce programme est essentiellement basé sur les méthodes classiques de dimensionnement que nous venons de présenter. Néanmoins, il peut utiliser une méthode itérative (« wedge method ») pour déterminer la poussée des terres et obtenir ainsi l'équilibre en force et en moment du batardeau soumis à la pression des eaux et aux poussées des terres sur les fiches.

## 1.6 Nouveaux développements sur le dimensionnement

### 1.6.1 Méthodes probabilistes

Plusieurs auteurs se sont intéressés au problème de fiabilité des ouvrages en gabion et de la prise en compte d'aspects probabilistes dans leur dimensionnement.

Kay (1976) a proposé une méthode de dimensionnement probabiliste de la résistance à la traction des serrures des palplanches. Il part du constat que la résistance à la traction des serrures est sujette à une forte dispersion. Pour préciser cette dispersion, il a procédé à des essais sur un nombre important d'échantillons. Finalement, il propose une méthode qui évalue le risque de ruine de l'ouvrage en prenant en compte la dispersion sur la résistance à la traction, le nombre de serrures de l'ouvrage et un certain type de distribution pour les caractéristiques du sol.

Jahren (1989) a étudié lui aussi la probabilité de ruine par dégrafage des serrures (éclatement), mais il a étendu l'application de ces méthodes probabilistes à la rupture par glissement et par cisaillement vertical du remblai interne. Il a effectué ces calculs pour des ouvrages existants et a trouvé des probabilité de ruine selon les ouvrages et le mode de rupture allant de  $1,1 \cdot 10^{-2}$  à  $10^{-10}$ . Le mode de rupture le plus probable est généralement la rupture des serrures.

### 1.6.2 Prise en compte du risque sismique

Chakrabarti et ses coauteurs ont adapté les outils classiques de dimensionnement des gabions pour prendre en compte les risques sismiques. les résultats sont présentés de manière succincte dans (Chakrabarti, 1978-a) et de manière plus détaillée dans (Chakrabarti, 1978-b). A cet effet, ils recommandent de vérifier la stabilité au glissement en utilisant des coefficients de poussée dynamique des terres, une pression dynamique de l'eau et l'effet des forces d'inertie sur le gabion. La stabilité interne doit également être vérifiée, les auteurs proposent à cet effet une modification de la méthode de Cummings. Enfin, il faut se protéger contre le risque de liquéfaction du remblai intérieur ou extérieur.

On peut citer comme exemple récent d'étude d'une gabionnade vis-à-vis du risque sismique le cas de travaux au port de Portland (Ozolin et al., 1995)

### 1.6.3 Méthodes utilisant les éléments finis

La première application des éléments finis à l'étude du comportement de gabions semble remonter à 1971 (Sens). Ce premier travail a comporté l'étude en déformation plane d'une section verticale de batardeau. Il comprend des calculs en élasticité linéaire et des calculs itératifs en élasticité non linéaire. Le problème de la déformation au remplissage d'une cellule isolée a été aussi abordé, cette fois avec un maillage tridimensionnel réduit au quart d'une cellule de gabion posée sur un substratum rigide, avec comme objectif de comparer avec les études sur modèles réduits réalisées par Albert et al. (1972).

Plus récemment, on doit à Clough et à ses collaborateurs une série de travaux sur l'analyse par éléments finis d'ouvrages en gabions. Kittisitra a étudié un modèle bidimensionnel axisymétrique (1976) et Clough et Hansen ont étudié le comportement d'une tranche verticale en déformation plane (1977) (voir aussi Hansen et Clough, 1982).

Un modèle étudiant une tranche horizontale, démarche analogue à celle utilisée par Rossow (1984) pour des calculs analytiques, a été développé pour permettre la prise en compte de la présence des cellules de raccord (Kuppusamy et al., 1985). Ce modèle a été ensuite appliqué à l'analyse du comportement d'un ouvrage réel instrumenté (Clough et Kuppusamy, 1985).

Enfin, une modélisation tridimensionnelle de la gabionnade (et non de la cellule isolée) a été développée, incluant aussi le sol de fondation et une berme (Clough et al., 1987). Le nombre d'éléments dans le gabion proprement dit est alors très réduit.

Le comportement du sol est modélisé par une loi élastique non linéaire.

L'étude d'une tranche horizontale a nécessité la prise en compte de grands déplacements pour obtenir une modélisation correcte du comportement des palplanches de connexion.

D'une manière générale, la prédiction de déformations radiales nécessite la prise en compte de la loi de comportement à la traction des palplanches et de leurs serrures. Un coefficient ad hoc réduisant le module d'élasticité de l'acier a été introduit à cet effet et des calculs intégrant différentes valeurs de ce paramètre ont été menés pour déterminer par comparaison avec l'expérience la valeur la mieux adaptée de ce paramètre.

De tels outils de calculs peuvent être recommandés pour l'étude d'ouvrages posant des problèmes particuliers (Clough et Martin, 1988). Ils peuvent permettre d'évaluer les déplacements sous réserve d'une modélisation satisfaisante du comportement rhéologique des matériaux utilisés.

### **1.6.4 Prise en compte d'une géométrie déformée en équilibre membranaire**

A notre connaissance, c'est Rossow (1984) qui s'est intéressé le premier à l'équilibre d'une tranche horizontale de gabionnade. Il a recherché l'équilibre membranaire de l'enceinte de palplanches soumise à des pressions données.

La recherche de l'équilibre membranaire sous-entend la prise en compte de grandes déformations (changement de géométrie).

Admettant que les pressions exercées par le remblai dans chaque cellule sont déterminées une fois pour toutes par d'autres méthodes, Rossow parvient à déterminer dans le cadre de la géométrie de l'équilibre membranaire, les tensions qui s'exercent dans les différents arcs de l'enceinte de palplanches ainsi que les déformations subies par rapport à la configuration initiale et notamment les rotations au niveau de la palplanche de raccord.

Schroeder (1987-a) a donné une discussion de ce travail de Rossow en insistant sur la diversité des observations faites sur le terrain. Il conclut qu'une modélisation simple, si elle peut être utile à maints égards, ne peut néanmoins décrire la réalité.

## **1.7 Utilisation du calcul à la rupture**

### **1.7.1 Perspectives ouvertes par le calcul à la rupture**

La poursuite des réflexions, la diversité des approches utilisées, la survenue encore aujourd'hui d'accidents, inclinent à penser que le sujet n'est pas entièrement maîtrisé. Il ressort donc un besoin d'investigations complémentaires.

Nous avons vu que les méthodes de dimensionnement actuelles sont basées sur la vérification de la résistance de la structure pour divers mécanismes de ruine. Chaque vérification est assortie d'un coefficient de sécurité.

Le calcul à la rupture peut permettre ce type de vérification en donnant une rigueur nouvelle à des méthodes un peu empiriques. On peut ainsi éviter par exemple la question de savoir quel est le coefficient réel de poussée des terres à prendre en compte dans tel mécanisme.

Le calcul à la rupture est particulièrement adapté à ces structures dans lesquelles l'état de contraintes initial est peu ou pas connu. C'est le cas par exemple des contraintes initiales dans les palplanches après le battage qui peuvent être considérables. Les mesures sur le terrain montrent une grande hétérogénéité des contraintes et des déplacements d'une cellule à l'autre. Ceci rend hasardeuses certaines modélisations sophistiquées comme les modèles élastiques non linéaires.

Le comportement usuel observé d'un gabion est de supporter sans dommages des déplacements assez importants. Ce point est un élément important pour pouvoir appliquer pratiquement les résultats du calcul à la rupture (on ne peut pas l'utiliser pour des matériaux fragiles).

Ces considérations montrent l'intérêt d'utiliser les méthodes du calcul à la rupture qui semble bien adapté au problème de la stabilité des gabions.

Toutefois, le calcul à la rupture ne pourra pas répondre aux questions relatives aux déplacements. Or, la limitation des déplacements peut être nécessaire pour permettre l'utilisation normale d'une gabionnade notamment quand elle est utilisée comme ouvrage définitif.

L'utilisation des résultats du calcul à la rupture pour le dimensionnement se heurtera également à la difficulté d'obtenir des encadrements suffisamment précis. En effet, le calcul à la rupture ne fournit en général que des encadrements des valeurs extrêmes des chargements supportables, les cas où il est possible de déterminer la solution exacte étant rares.

De plus, l'introduction de nouvelles méthodes de dimensionnement ne peut se faire que de manière prudente et progressive, les méthodes antérieures bénéficiant d'une longue expérience pratique cumulée qui a permis notamment d'affiner les valeurs des coefficients de sécurité. C'est sans doute là le principal obstacle.

### 1.7.2 Travaux antérieurs

Nous allons maintenant présenter les applications existantes du calcul à la rupture aux gabions.

Concernant la cellule de gabion isolée, nous pouvons citer :

- Lochmann (1988), projet de fin d'études dirigé par Dormieux,
- Dormieux et Delaurens (1991)

Le travail de Lochmann réalise une étude cinématique assez complète de la cellule de gabion isolée sous poids propre, sous moment de renversement sous une force horizontale. Il envisage le cas de la cellule posée sur un substratum rocheux et celui de la cellule fichée dans le sol. La principale limitation de ce travail est qu'il a considéré un remblai purement cohérent, alors que le cas pratique est celui du remblai frottant.

L'article de Dormieux et Delaurens étudie, en combinant les méthodes statique et cinématique, la stabilité de la cellule de gabion posée sur le rocher soumise à son poids propre. Deux critères de résistance différents sont envisagés pour le matériau de remblai : le critère de Tresca et celui de Coulomb. Le frottement entre le remblai et le substratum n'est pas pris en compte.

Concernant la gabionnade, il faut citer le rapport rédigé par Buhan, Dormieux et Maghous (1991). Ce rapport étudie par la méthode cinématique la stabilité d'une gabionnade posée sur un substratum rocheux. La géométrie réelle de la gabionnade est prise en compte, ainsi que l'effet de la présence de l'eau dans le remblai. Le critère de résistance retenu pour le remblai est le critère de Coulomb. Le frottement entre le remblai et le substratum est pris en compte.

### 1.7.3 Principales orientations du présent travail

Les travaux antérieurs utilisant le calcul à la rupture (y compris la méthode de Brinch-Hansen modifiée), ont toujours considéré des cinématiques dans lesquelles les palplanches restaient droites. Nous utiliserons une modélisation mixte dans laquelle les palplanches seront modélisées comme une coque. Ceci permettra d'envisager des cinématiques avec des déformations en flexion des palplanches ce qui correspond à certaines observations d'accidents ou de modèles réduits à grande échelle. On peut alors concevoir de nouvelles cinématiques aboutissant à des résultats plus précis ou intégrant l'effet de la poussée d'un remblai. Nous considérerons également dans les études statiques la contribution due à la résistance à la flexion des palplanches ce qui n'était pas le cas jusqu'à maintenant.

Un autre axe est l'étude des palplanches de raccord qui sont la cause la plus fréquente d'accidents. Nous verrons que la construction de statiques en configuration initiale de gabions cellulaires se heurte à des difficultés. Ces problèmes de stabilité seront analysés par la méthode cinématique dans le cas du remblai

cohérent et dans le cas constaté sur chantier, de liquéfaction locale du remblai dans la cellule de raccord pendant la compaction.

Passons maintenant à une description rapide de l'organisation de la suite de ce mémoire.

Le chapitre 2 est consacré à la modélisation du gabion. Il permet de préciser les diverses hypothèses de l'étude.

Le chapitre 3 étudie la statique de la cellule de gabion sous poids propre en prenant en compte la résistance à la flexion des palplanches.

Le chapitre 4 applique la méthode cinématique à la cellule de gabion sous poids propre et en présence d'eau. On envisagera également le cas d'un chargement constitué d'un système de forces horizontales. L'étude sera menée dans le cas d'une interface remblai/substratum lisse ou frottante.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude statique de la gabionnade. On envisagera les gabions circulaires en configuration initiale et en configuration d'équilibre membranaire, ainsi que les gabions cloisonnés. On prendra en compte l'influence de la résistance à la flexion des palplanches.

Le chapitre 6 porte sur l'étude cinématique de la gabionnade en configuration initiale sous poids propre et en présence d'eau. On étudiera aussi l'effet de la présence d'un remblai externe, comme c'est le cas pour une configuration quai. Dans le cas particulier d'un remblai purement cohérent, on mettra en évidence la possibilité de mécanismes ne faisant pas jouer la résistance à l'effort normal des palplanches, ce qui peut se traduire par une faible résistance sous poids propre imputable à la conception géométrique des gabions cellulaires.

Le chapitre 7 confrontera certains de nos résultats avec des données provenant de l'observations d'ouvrages réels ou de modèles réduits. On comparera également avec les méthodes classiques de dimensionnement.



## 2. Modélisation du gabion

*Ce chapitre va présenter la modélisation de la cellule de gabion qui sera utilisée dans la suite en présentant et discutant les diverses hypothèses.*

*Nous commencerons par une présentation générale de la modélisation mixte que nous utiliserons (§2.1). Nous passerons ensuite aux divers critères de résistance qui caractérisent complètement pour notre étude en calcul à la rupture les propriétés mécaniques des matériaux utilisés. Après un examen rapide du critère de résistance du remblai (§2.2), nous aborderons la question plus délicate du critère de résistance de la coque (§2.3) : caractéristiques des palplanches, utilisation de l'homogénéisation, critère en efforts normaux et en moments fléchissants. Enfin, nous examinerons les critères de résistance des diverses interfaces remblai/substratum, remblai/palplanches, pied des palplanches/substratum (§2.4).*

### 2.1 Modélisation mixte

Une cellule de gabion est constituée de deux parties, remblai et enceinte de palplanches aux propriétés mécaniques et aux formes géométriques très différentes. Le remblai est normalement constitué d'un matériau granulaire et l'enceinte de palplanches est un assemblage de pièces d'acier ; le remblai est un corps convexe "massif" et l'enceinte de palplanches est un corps mince.

Ces deux parties vont être modélisées de manières différentes : le remblai sera modélisé comme un milieu continu tridimensionnel et l'enceinte de palplanches comme une coque mince à deux dimensions. C'est le fait de décrire un système mécanique par des modélisations de dimensions différentes pour certaines de ses parties que l'on appelle « modélisation mixte ».

A ces modélisations de dimensions différentes sont attachées des représentations différentes des efforts intérieurs et des mouvements virtuels que l'on sera amené à utiliser simultanément lors des approches statique et cinématique du calcul à la rupture (Tableau 2-1).



	modélisation	efforts intérieurs	vitesse virtuelle
remblai	continue 3D	$\underline{\underline{\sigma}}$	$\underline{U}$
palplanches	coque mince 2D	$\underline{N}, \underline{M}, \underline{V}$	$\underline{v}, \underline{\omega}$

Tableau 2-1 Comparaison des modélisations 2D et 3D

La modélisation du gabion comme une coque est naturelle : pour des palplanches plates, la surface moyenne se définit comme la surface moyenne de la palplanche sans les serrures. Cette coque peut être considérée comme mince : l'épaisseur maximale (au niveau des serrures) est de l'ordre de 8,5 cm, ce qui est faible comparé aux dimensions du gabion typiquement de l'ordre de la dizaine de mètres et au rayon de courbure de la surface moyenne (égal au rayon du gabion).

## 2.2 Critère de résistance pour le remblai

Les règles de bonne construction des gabions imposent d'employer des matériaux de remblai de bonne qualité. Le matériau de remplissage doit assurer un bon drainage (EAU 1990). Il doit aussi avoir une grande résistance au cisaillement (Pernier, 1980).

Ces considérations amènent à retenir pour le remblai interne des matériaux frottants constitués de sable ou de gravier.

En conséquence, dans les cas usuels, on pourra retenir comme critère de résistance du remblai interne, exprimé en contraintes effectives un critère de Coulomb sans cohésion caractérisé par un angle de frottement interne  $\varphi$ . Rappelons que ce critère de résistance s'écrit en notant  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  respectivement les contraintes principales majeure et mineure, les tractions étant comptées positivement :

$$g(\underline{\underline{\sigma}}) = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi \leq 0 \quad (2-1)$$

Nous effectuerons néanmoins quelques calculs en utilisant un critère de Tresca pour le remblai.

## 2.3 Critère de résistance de la coque

### 2.3.1 Caractéristiques géométriques et mécaniques de résistance des palplanches

Les catalogues de palplanches donnent les indications suivantes pour les palplanches plates :

- largeur nominale
- épaisseur de l'âme
- angle de débattement
- périmètre d'une palplanche
- section
- masse linéique de la palplanche
- masse surfacique de la paroi
- module de résistance
- moment d'inertie
- résistance garantie au dégrafage

Rappelons l'utilisation de la notion de module de résistance, parfois appelé aussi module d'inertie statique. Si on désigne par  $M$  le moment de flexion, par  $m_r$  le module de résistance et par  $\sigma$  la contrainte maximale de traction ou de compression dans la section, on a la relation suivante tant que l'on reste dans le domaine élastique :

$$M = m_r \sigma \quad (2-2)$$

Dans le cas d'une section de hauteur  $e$  symétrique par rapport au plan contenant le vecteur moment, on a la relation suivante entre  $m_r$ ,  $h$  et le moment d'inertie  $I$  de la section par rapport au même axe et :

$$I = m_r \frac{e}{2} \quad (2-3)$$

Ces données ne permettent pas de déterminer directement le moment ultime mais seulement le moment maximal élastique  $M_e$  en fonction de la limite élastique en traction simple  $\sigma_e$ .

$$M_e = m_r \sigma_e \quad (2-4)$$

### 2.3.2 Présentation de la démarche d'homogénéisation

La coque constituée par l'enceinte de palplanches se caractérise par une très forte hétérogénéité des propriétés mécaniques compte tenu de la présence des serrures. Pour pouvoir manipuler commodément la représentation "coque" de l'en-

ceinte de palplanches, il est indispensable d'homogénéiser cette coque, c'est à dire de remplacer la coque réelle par une coque homogène ayant à grande échelle les mêmes propriétés mécaniques. Du point de vue du calcul à la rupture, il s'agit de trouver un critère de résistance homogénéisé.

Le cadre naturel dans notre cas est la théorie de l'homogénéisation périodique basée sur l'hypothèse de périodicité du milieu étudié. Cette hypothèse, parfois un peu arbitraire, est ici pleinement justifiée car l'enceinte de palplanches est effectivement périodique (Figure 2-1). On notera que la périodicité est d'un type un peu différent de ceux rencontrés pour des solides tridimensionnels, puisque le groupe de symétrie est engendré par (toutes) les translations selon l'axe vertical et par la rotation autour de l'axe de symétrie d'angle  $1/2\pi R$ , où  $l$  est la largeur utile d'une palplanche et  $R$  le rayon d'un gabion.

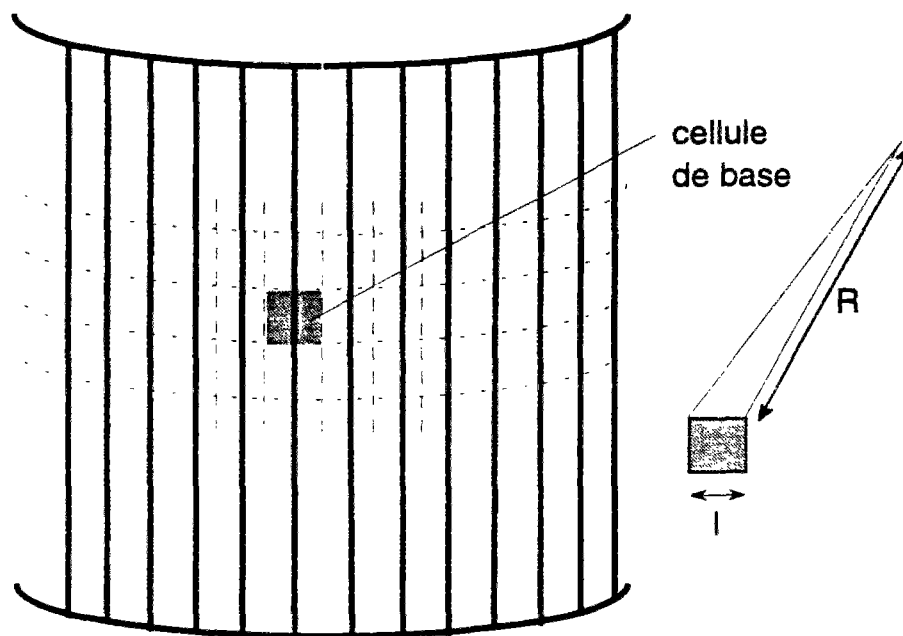


Figure 2-1 Structure périodique et cellule de base

Cette démarche d'homogénéisation sera d'autant plus justifiée que le nombre de palplanches sera grand. La largeur utile d'une palplanche est de l'ordre de 50 cm, l'ordre de grandeur du rayon est de 8 à 12 m pour les cellules principales de gabions circulaires soit donc un nombre de palplanches de l'ordre de la centaine.

Compte tenu de la démarche d'homogénéisation retenue, il faut être capable de formuler un critère de résistance homogénéisé pour la coque.

Nous effectuerons une première simplification justifiée par l'hypothèse de la coque mince : nous allons étudier le cas limite où le rayon du gabion est infini. Dans ce cas, on est ramené à un problème de plaque mince.

La démarche est toutefois compliquée par :

- la complexité de la géométrie réelle de la palplanche
- la présence d'une interface entre deux palplanches adjacentes
- la superposition de deux démarches asymptotiques :
  - la modélisation plaque (l'épaisseur tend vers zéro)
  - l'homogénéisation périodique (la taille de la cellule de base tend vers zéro); on note que ces deux démarches asymptotiques portent sur des directions différentes du solide tridimensionnel.

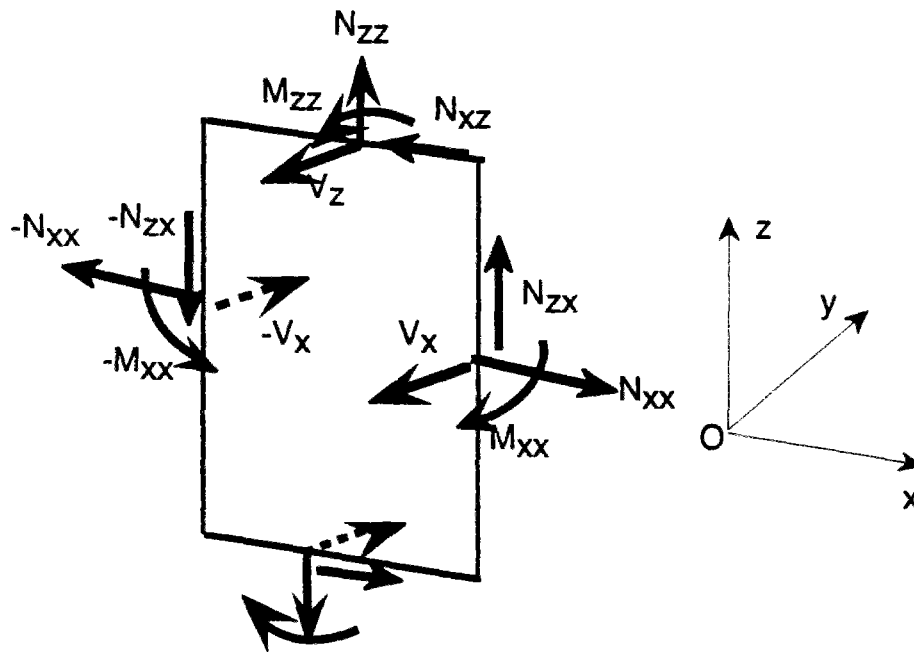


Figure 2-2 Efforts dans une plaque

Il paraît difficile de déduire les caractéristiques de résistance de la palplanche à partir des données de résistance de l'acier constitutif et de la géométrie, à cause de la géométrie complexe des serrures et des surfaces de contact entre deux palplanches adjacentes qui vont évoluer au fur et à mesure de la plastification.

En conséquence, nous allons nous contenter de considérations heuristiques. Nous allons examiner les efforts généralisés maximaux supportables au niveau des serrures et au niveau d'une coupure perpendiculaire aux serrures.

Rappelons que pour une plaque dont le matériau constitutif peut être modélisé par un matériau continu tridimensionnel classique, le tenseur des efforts normaux est symétrique. Dans notre cas, le tenseur des efforts normaux que nous considérons est un tenseur homogénéisé, et s'il peut être exprimé comme une moyenne surfacique, alors il est aussi un tenseur symétrique. Le même raisonnement vaut aussi pour le tenseur des moments fléchissants. Compte tenu des caractéristiques de la plaque constituée de palplanches, on s'attend à ce que le

domaine de résistance de la plaque ainsi homogénéisée présente une anisotropie marquée.

Notons également qu'une coque satisfaisant l'hypothèse de Kirchhoff-Love est telle que l'effort tranchant ne travaille pas. Dans ce cadre, il n'y a pas lieu de se poser la question de la dépendance du domaine de résistance en fonction de cet effort tranchant. On doit donc déterminer un domaine de résistance fonction seulement des efforts normal et des moments fléchissants.

### 2.3.3 Résistance vis à vis des efforts normaux

La donnée principale est la capacité de résistance en traction  $N_{xx}$ . C'est l'effort  $N_{xx}$  qui fait travailler les serrures à l'ouverture. La résistance garantie au dégrafage est la donnée principale fournie par le fabricant. Il est donc naturel d'écrire la condition :

$$N_{xx} \leq N_0 \quad (2-5)$$

On peut avoir besoin également de la limite inférieure de  $N_{xx}$ . Compte tenu du fait que la résistance des serrures est voisine de celle de l'âme des palplanches et que la résistance de l'âme des palplanches doit être identique en traction et compression, on peut écrire :

$$|N_{xx}| \leq N_0 \quad (2-6)$$

La prise en compte de l'instabilité de la coque en compression (flambement) pourrait amener à restreindre davantage le domaine autorisé pour  $N_{xx}$ .

La résistance à l'effort normal  $N_{zz}$  est déterminée par l'aire  $S$  de la section transversale de la palplanche et par la résistance en traction simple  $\sigma_0$  de l'acier utilisé. On peut donc écrire :

$$|N_{zz}| \leq \sigma_0 S \quad (2-7)$$

La résistance au terme diagonal de l'effort normal  $N_{zx}$  (qui est l'effort selon Oz le long d'une coupure parallèle à Oz), va être déterminée par la résistance des serrures des palplanches pour ce type de sollicitation. Ce type d'effort va être limité par la résistance au frottement de l'interface. On prendra en conséquence une loi du type suivant :

$$|N_{zx}| \leq k |N_{xx}| \quad (2-8)$$

Le coefficient  $k$  est un coefficient de frottement pris usuellement égal à 0,3.

La résistance au terme diagonal de l'effort normal  $N_{xz}$  (qui est l'effort selon  $Ox$  le long d'une coupure parallèle à  $Ox$ ), va être déterminée par la résistance à ce type d'effort d'une palplanche. On a la majoration suivante qui correspond à la résistance maximale au cisaillement en utilisant le critère de Mises pour le matériau constitutif de la palplanche, en notant  $e_m$  l'épaisseur moyenne de la palplanche :

$$|N_{xz}| \leq \sqrt{1/3} \sigma_0 e_m \quad (2-9)$$

Compte tenu de la symétrie du tenseur des efforts normaux, c'est le plus petit majorant qu'il faut adopter, c'est à dire celui qui est donné par l'inégalité (2-8). En effet, on a  $N_{xx} \leq N_0 \leq \sigma_0 e$ . On peut prendre typiquement  $e_m = 1,5 e$ . Une condition suffisante pour que (2-8) entraîne (2-9) est que :

$$k \leq 0,87 \quad (2-10)$$

On supposera la condition ci-dessus satisfaite.

### 2.3.4 Résistance vis à vis des moments fléchissants

On aura également à tenir compte de la résistance aux efforts de flexion. Commençons par l'effort de flexion  $M_{zz}$ . Celui-ci va dépendre des caractéristiques géométriques de la palplanche. En supposant que la palplanche est soumise seulement à cet effort de flexion, on peut adopter la borne suivante :

$$|M_{zz}| \leq M_0 \quad (2-11)$$

$$\text{avec } M_0 = \sigma_0 \frac{\int |y| x dy}{l} \quad (2-12)$$

On suppose l'origine des  $y$  choisie au centre de gravité de la section. Dans (2-12),  $S$  désigne la section d'une palplanche et  $l$  sa largeur utile. On note que la valeur de  $M_0$  donnée par (2-12) ne figure pas parmi les données fournies habituellement par le catalogue du constructeur.

Examinons maintenant la résistance à l'effort de flexion  $M_{xx}$ . Au niveau des serrures, cet effort va être repris (raisonnons sur une modélisation de la serrure par une rotule cylindrique), par des efforts tangentiels aux surfaces en contact. Prenant en compte le fait que dans le fonctionnement d'un gabion, l'effort nettement prédominant est l'effort normal, on propose d'écrire la relation suivante :

$$|M_{xx}| \leq k' |N_{xx}| \quad (2-13)$$

La valeur de  $k'$  peut faire l'objet d'une détermination expérimentale. L'écriture de la transmission de cet effort au niveau de l'âme conduit à cette autre majoration :

$$|M_{xx}| \leq \sigma_0 (e')^2 / 4 \quad (2-14)$$

Dans l'inégalité ci-dessus,  $e'$  désigne l'épaisseur de l'âme de la palplanche.

Enfin, il faudrait envisager le cas du terme diagonal du moment fléchissant  $M_{xz}$ . Ce terme pourrait être majoré comme le terme  $M_{xx}$ , en considérant la résistance d'une section de palplanche ou l'interface constituée par une serrure. En fait, cette résistance n'interviendra pas dans les résultats de nos calculs.

## 2.4 Résistance des interfaces

Notre problème met en jeu plusieurs interfaces :

- interface remblai intérieur /palplanches
- interface remblai intérieur /substratum
- interface éventuelle sol extérieur /palplanches
- interface éventuelle pied de palplanche /substratum rocheux

Pour chacune de ces interfaces, il faut définir leur critère de résistance qui porte sur  $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ , la valeur du vecteur contrainte au point de l'interface de normale  $\underline{n}$ . Nous supposons dans la pratique que les propriétés de ces interfaces sont isotropes.

### 2.4.1 Interface remblai intérieur /palplanches

Il s'agit d'une interface sol /acier. Comme le remblai d'une cellule de gabion est normalement un matériau grenu, il est normal de chercher à caractériser l'interface par un domaine de résistance de type "Coulomb".

On prend de manière usuelle en mécanique des sols, l'angle de frottement d'un sol contre une paroi de soutènement égal à la moitié ou au 2/3 de l'angle de frottement interne du sol dans le cas de la poussée. Ceci concerne plutôt une paroi en maçonnerie (Pilot, 1979).

Plusieurs études expérimentales ont été réalisées concernant le frottement d'un sable sec contre de l'acier. Ces expériences mettent en évidence l'importance déterminante de la rugosité de l'acier, mais aussi des caractéristiques du sable, granulométrie, angularité. Les résultats d'un certain nombre d'études japonaises sur le sujet (Figure 2-3) sont exposées par Uesigi et Kishida (1986). Les angles de frottement interne pour les sables utilisés par Uesigi et Kishida (notés par un rond noir sur la figure) s'étagent de  $38^\circ$  à  $41,5^\circ$ . On trouve d'autres résultats expérimentaux rapportés par Desai et Rigby (1995). Suivant l'état de surface de l'acier,

on constate une variation du simple au triple de ce frottement (soit des angles allant de 14° à 33°).

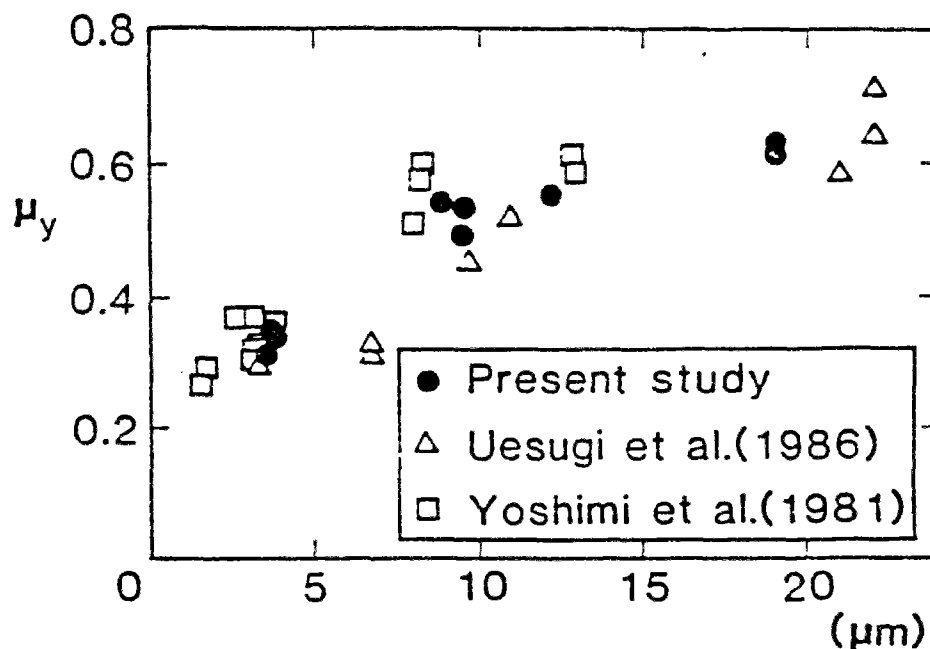


Figure 2-3 Coefficient de frottement maximal entre du sable de Toyoura et de l'acier doux (Uesugi et Kishida, 1986)

D'autre part, on observe un comportement radoucissant lors des expériences (Figure 2-4). Du point de vue du calcul à la rupture, il paraît raisonnable de considérer les caractéristiques pour de grandes déformations (caractéristiques résiduelles), qui semblent seules en mesure d'assurer avec de bonnes chances qu'un chargement supportable calculé avec ces données soit effectivement supporté.



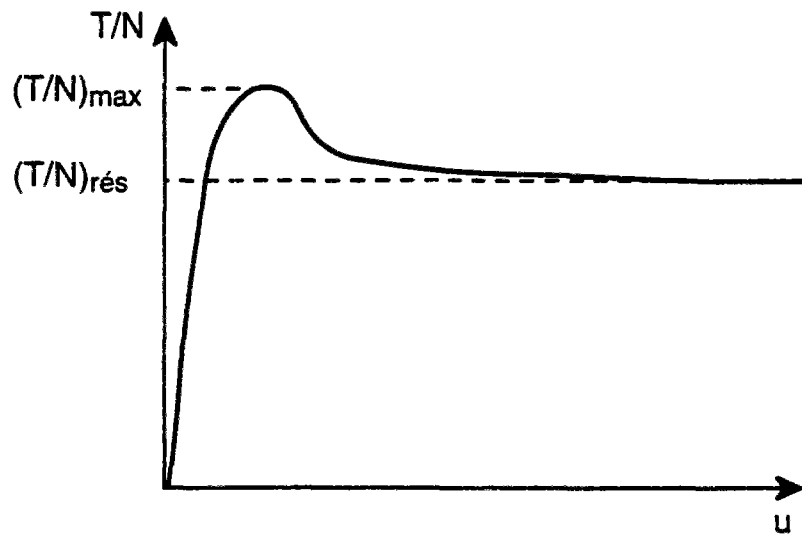


Figure 2-4  $T/N$  en fonction du déplacement  $u$  (d'après Uesigi et Kishida, 1986)

Les données disponibles concernent principalement le frottement entre l'acier et le sable sec. Nous n'avons pas eu à notre disposition de données concernant le sable contenant de l'eau. Des expériences ont été menées concernant le frottement entre l'acier et du sable gelé (Ladanyi, 1995). Les résultats sont complexes, fonction de nombreux paramètres dont la vitesse de chargement. La résistance maximale de l'interface n'est qu'une faible fraction (de l'ordre de 10%) de la résistance maximale du sable gelé. Elle croît avec la contrainte normale avec un angle d'environ  $20^\circ$ . La résistance résiduelle semble croître avec un angle du même ordre. Il n'est pas envisagé le phénomène transitoire du dégel qui pourrait être plus défavorable avec la présence éventuelle d'une lame d'eau.

Enfin, le vieillissement de l'interface ne paraît pas négligeable à priori compte tenu du risque de corrosion. La présence d'une couche corrodée introduit un matériau aux qualités mécaniques modifiées : l'interface avec le remblai devient plus rugueuse ce qui est à priori favorable mais le matériau corrodé a des propriétés mécaniques très inférieures au matériau sain.

L'interface présente une anisotropie du fait de la présence du renflement des serrures orientées verticalement. On peut s'attendre à un frottement plus important dans la direction horizontale que dans la direction verticale.

Compte tenu de ces incertitudes, l'hypothèse conservatrice dans les calculs est de négliger la résistance au cisaillement de l'interface que l'on suppose donc lisse. Ce sera notre hypothèse de calcul.

## **2.4.2 Interface remblai /substratum**

Dans le cas où le substratum est rocheux, l'interface remblai /substratum est généralement traitée comme une interface avec frottement de type "Coulomb".

L'angle de frottement de l'interface est pris égal à l'angle de frottement du matériau du remblai par Cummings (1957). C'est aussi ce qui est recommandé dans l'ancienne notice technique du STCPMVN (Pernier, 1980) sauf pour le cas d'une roche tendre où ce document recommande un coefficient de frottement de 0,5 et le cas où il y a le risque de présence d'une couche plus profonde ayant une plus faible résistance au cisaillement (notamment pour un schiste).

Nous considérerons dans cette étude deux hypothèses de travail : interface lisse ou interface adhérente. L'étude de ces deux cas extrêmes nous permet ainsi d'encadrer les différents comportements possibles de cette interface.

## **2.4.3 Interface pied de palplanche /substratum**

Il faut distinguer deux types de configurations :

- substratum meuble
- substratum rocheux

### **2.4.3.1 Cas du substratum meuble**

Dans le cas du substratum meuble, les palplanches sont enfoncées avec une certaine fiche dans ce substratum. Il y a donc une interface intérieure et une interface extérieure (Figure 2-5).

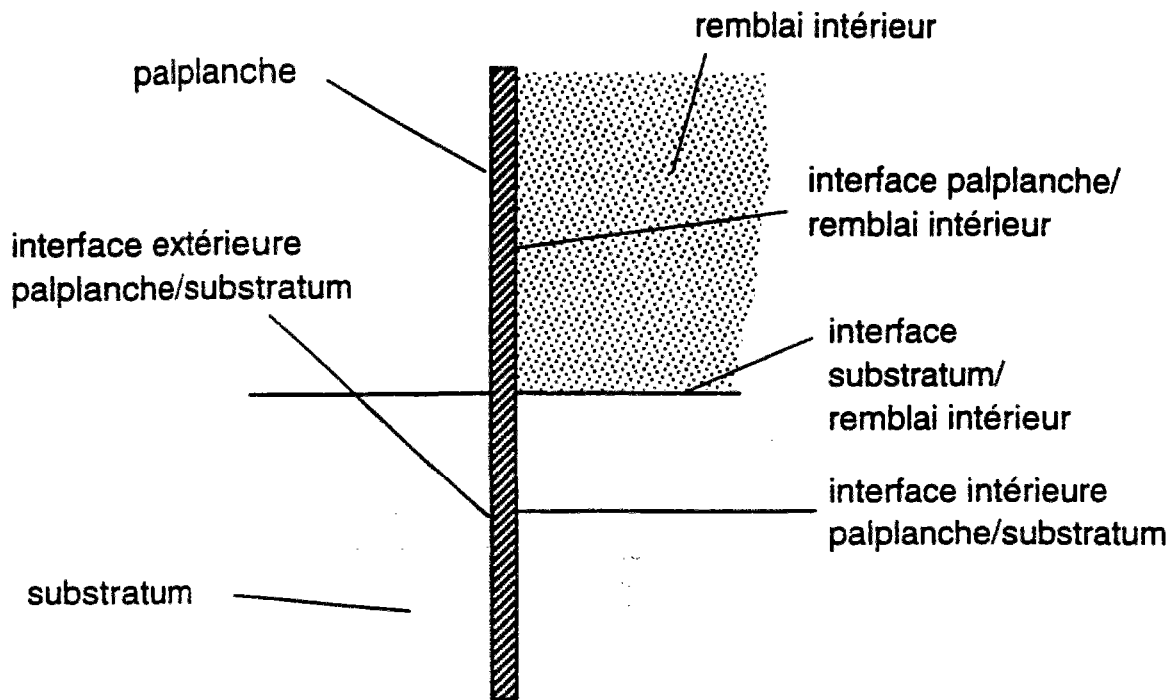


Figure 2-5 Interfaces du gabion sur substratum meuble

Suivant la nature du substratum, on peut prendre divers critères de résistance pour ces deux interfaces palplanche /substratum : interface avec frottement de type « Coulomb » ou bien interface avec frottement de type « Tresca ».

Dans la suite, nous nous limiterons au cas du substratum rocheux.

#### 2.4.3.2 Cas du substratum rocheux

Dans ce cas, la modélisation précédente ne peut plus s'appliquer aussi directement. Si l'on suppose pour simplifier que la résistance du substratum est infinie, on peut retenir diverses modélisations selon la configuration géométrique de la liaison entre la palplanche et le substratum (Figure 2-6).

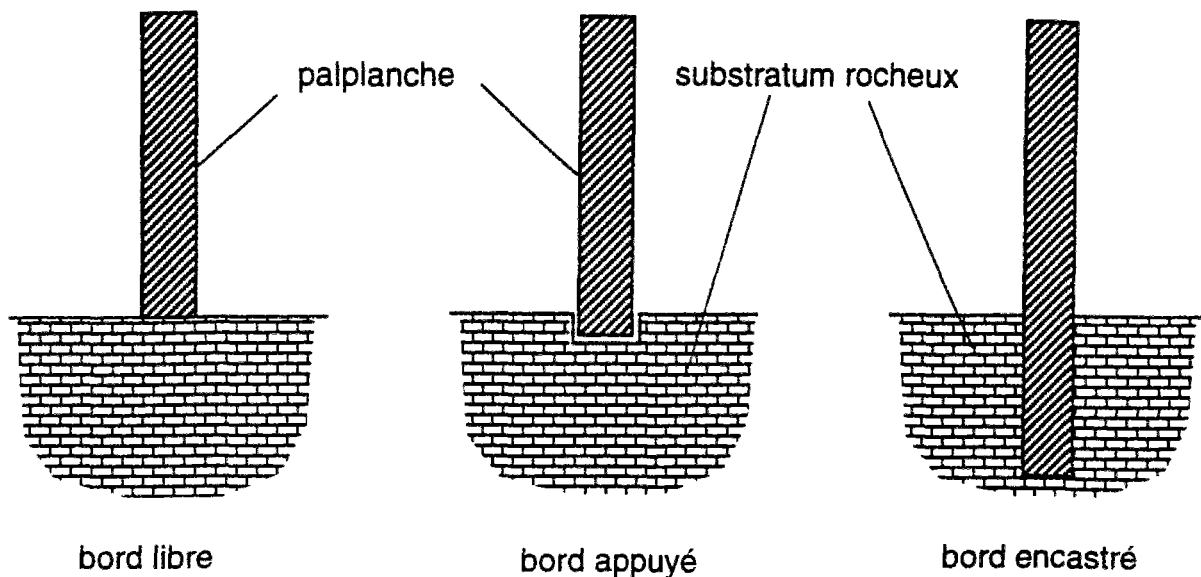


Figure 2-6 Configurations géométriques de  
la liaison palplanche / substratum rocheux

Dans le cas du **bord libre**, on pourrait envisager une interface avec frottement. L'hypothèse la plus conservatrice est de supposer que l'interface est lisse sans cohésion ; le bord inférieur est donc libre de se déplacer et de tourner. On aura alors l'effort tranchant et le moment fléchissant nuls sur le bord inférieur de l'enceinte de palplanches.

Dans le cas du **bord appuyé**, on considère que la configuration géométrique bloque tout déplacement horizontal mais que la rotation autour de la base peut s'effectuer librement. Les conditions à la limite au bord inférieur de l'enceinte de palplanches s'écrivent alors : déplacement horizontal nul, moment fléchissant nul.

Dans le cas du **bord encastré**, tout mouvement des palplanches est empêché. Les conditions à la limite au bord inférieur de l'enceinte de palplanches sont déplacement horizontal et rotation nuls.

Dans notre étude, nous nous en tiendrons à ces trois cas. Il serait possible d'envisager des variantes aux conditions déplacement horizontal nul et rotation nulle, en supposant que l'effort horizontal ou le moment fléchissant à la base sont limités par les capacités de résistance du substratum.



### 3. Étude statique du gabion isolé sous poids propre

*Nous commencerons l'étude statique de la cellule de gabion isolée sous poids propre par la détermination d'une solution statique ne faisant pas intervenir la résistance à la flexion des palplanches (§3.1).*

*Nous aborderons ensuite la prise en compte de cette résistance à la flexion par le moyen d'un problème auxiliaire : celui d'une coque cylindrique soumise à une pression hydrostatique (§3.2). L'étude de certains cas de condition à la limite sur le bord inférieur est reportée en annexe B.*

*Nous reviendrons ensuite au cas de la cellule de gabion pour donner des solutions statiques prenant en compte la résistance à la flexion des palplanches (§3.3).*

#### 3.1 Étude statique en négligeant la résistance à la flexion des palplanches

##### 3.1.1 Principe du calcul à la rupture

On se réfère à Salençon (1983, 1990, 1993-b). Le calcul à la rupture suppose donnés la géométrie de la structure étudiée, le critère de résistance de chaque constituant de la structure, et le chargement, ensemble des forces extérieures données appliquées à la structure, en dehors des forces de réaction. Ce chargement est supposé défini par un nombre fini de paramètres dits paramètres de chargement. Un chargement est dit potentiellement supportable quand il existe un champ de contraintes satisfaisant les équations d'équilibre, les conditions aux limites données en contraintes et vérifiant partout le critère de résistance.

L'objectif du calcul à la rupture est de déterminer quels sont les chargements potentiellement supportables par la structure et ceux qui ne le sont pas. On a entièrement répondu à cette question quand on a déterminé les chargements extrêmes supportables. Le plus souvent, on obtient seulement un encadrement de ces chargements extrêmes.

Dans notre cas, le chargement dépend d'un seul paramètre : le poids volumique du remblai. On note  $\gamma^+$  le poids volumique extrême supportable. Le calcul à la rupture permet de combiner deux approches pour encadrer  $\gamma^+$  : l'approche cinématique et l'approche statique.

Dans le présent chapitre, nous nous focaliserons sur l'application de l'approche statique au gabion isolé. L'approche statique, plus précisément l'approche statique par l'intérieur consiste en l'application de la définition des chargements potentiellement supportables. On recherche des champs de contraintes particuliers

satisfaisant les équations d'équilibre, les conditions aux limites en contraintes et le critère de résistance en tout point.

### 3.1.2 Rappel des travaux antérieurs

Les travaux antérieurs éludent, de manière générale, la résistance à la flexion des palplanches plates utilisées pour la construction d'une cellule de gabion cellulaire. Il en est ainsi de la recommandation de la commission des ouvrages de rives (EAU 1990), de l'ancienne notice technique du STCPMVN (Pernier, 1980), de la notice de la marine des Etats-Unis (Design Manual, 1986).

L'attention au comportement mécanique à la flexion a été attirée par divers auteurs dont Vergobbi (1979). Celui-ci, en menant une analyse dimensionnelle du problème d'une gabionnade, a introduit parmi les paramètres le module de rigidité à la flexion des palplanches  $EI$ . Il s'étonnait qu'une telle analyse dimensionnelle n'ait pas été effectuée pour étudier les conditions de similitude à respecter lors d'essais sur modèles réduits. Il ressortait de l'analyse menée que la plupart des modèles réduits reflètent mal la réalité physique à cause d'une rigidité excessive à la flexion.

Parmi les études menées en utilisant le calcul à la rupture, (Lochmann, 1988), (Dormieux et Delaurens, 1991), (Buhan et al., 1992), seule l'étude de Dormieux et Delaurens comporte une étude statique. Celle-ci ne prend pas en compte la résistance à la flexion des palplanches. C'est cette étude dont nous allons maintenant rappeler une partie de la démarche et certains résultats. Par rapport à cette étude, l'exposé sera simplifié par l'utilisation de la modélisation de l'enceinte de palplanches par une coque homogène et non par un solide tridimensionnel.

### 3.1.3 Hypothèses

On va se placer dans un cadre d'hypothèses très simples, allant dans le sens de la sécurité par rapport à la réalité. Ainsi, l'application de la méthode statique sous ces hypothèses particulières fournira une borne inférieure valable dans un cadre plus général.

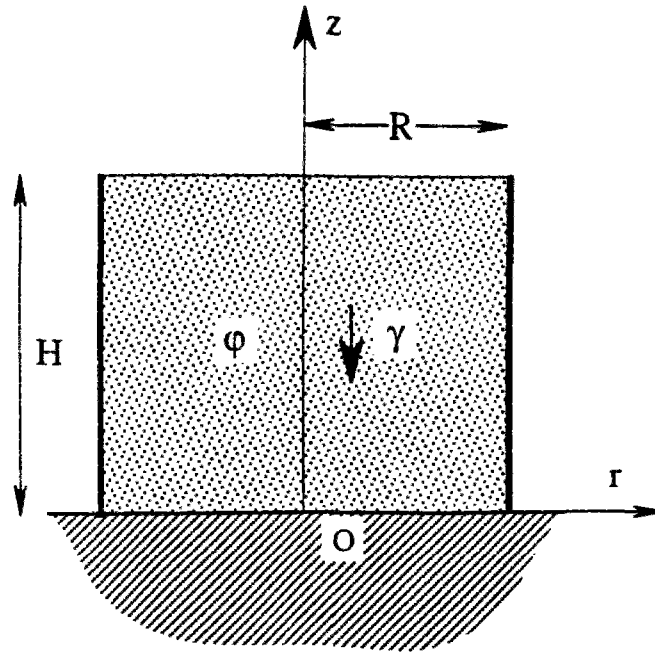


Figure 3- 1 Coupe de la cellule de gabion

On fait donc les hypothèses suivantes :

- les interfaces remblai / substratum, remblai / palplanches sont lisses (pas de frottement, pas de cohésion) ;
- le seul paramètre de chargement est le poids propre du remblai  $\gamma$  supposé uniforme ( on ne tient pas compte du poids propre des palplanches) ;
- la résistance de l'enceinte de palplanches aux moments de flexion est supposée nulle (modélisation membranaire).

Sous ces hypothèses, le problème ne dépend que de deux paramètres géométriques H et R, de deux paramètres caractérisant la résistance des constituants  $\phi$  et  $N_0$ , et un paramètre de chargement  $\gamma$  (Figure 3- 1). Une analyse dimensionnelle nous donne :

$$\frac{\gamma^+ H R}{N_0} = \left( \frac{\gamma H R}{N_0} \right)^+ = F^+ \left( \phi, \frac{H}{R} \right) \quad (3- 1)$$

où  $F^+$  est une fonction adimensionnelle.

### 3.1.4 Efforts dans l'enceinte de palplanches

L'utilisation de l'approche statique demande de construire des champs statiquement admissibles, vérifiant donc les équations d'équilibre. Il nous faut donc



rappeler ces équations dans le cas particulier de l'équilibre membranaire (Figure 3-2).

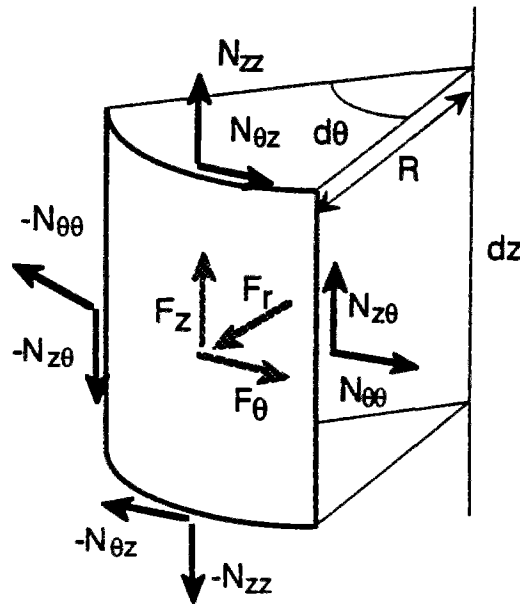


Figure 3- 2 Efforts membranaires

Cette dernière hypothèse permet d'utiliser la théorie membranaire des coques qui donne des équations beaucoup plus simples. La géométrie (cylindre circulaire) permet encore de simplifier.

On obtient finalement (voir annexe D) :

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial z} + F_\theta = 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \\ \frac{N_{\theta\theta}}{R} - F_r = 0 \end{cases} \quad (3- 2)$$

Dans les équations ci-dessus,  $F_r$ ,  $F_\theta$  et  $F_z$  sont les composantes, suivant le repère orthonormé attaché aux coordonnées cylindriques, de la densité surfacique de force appliquée à l'enceinte de palplanches.

### 3.1.5 Choix d'un type de champ dans le remblai

Le champ de contraintes dans le remblai doit satisfaire l'équation d'équilibre (3- 3) :

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}} - \gamma \underline{\underline{e}}_z = 0 \quad (3- 3)$$

On considère une classe de champ de type « Rankine » :

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = \gamma(z - H) \\ \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \lambda\gamma(z - H) \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zr} = 0 \end{cases} \quad (3- 4)$$

Ce champ (3- 4) vérifie l'équation d'équilibre (3- 3). Il vérifie la condition à la limite en  $z=H$  (forces surfaciques nulles sur le bord supérieur). Les conditions aux limites en  $r=R$  et  $z=0$  (interface lisse sans cohésion) sont également vérifiées.

Il reste à écrire la condition pour que le critère de résistance soit partout vérifié dans le remblai supposé obéir à un critère de Coulomb sans cohésion. Rappelons que ce critère de résistance s'écrit en notant  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  respectivement deux contraintes principales du tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$ , les tractions étant comptées positivement :

$$g(\underline{\underline{\sigma}}) = (\sigma_i - \sigma_j) + (\sigma_i + \sigma_j) \sin \varphi \leq 0 \quad \forall (i, j) \quad (3- 5)$$

En prenant  $\sigma_i = \sigma_{zz}$  et  $\sigma_j = \sigma_{rr}$ , on obtient la condition nécessaire suivante :

$$K_p \geq \lambda \quad (3- 6)$$

En prenant  $\sigma_i = \sigma_{rr}$  et  $\sigma_j = \sigma_{zz}$ , on obtient la condition nécessaire suivante :

$$\lambda \geq K_a \quad (3- 7)$$

Les conditions (3- 6) et (3- 7) sont suffisantes pour que la condition (3- 5) soit vérifiée.  $K_a$  et  $K_p$  désignent respectivement les coefficients de poussée et de butée et sont donnés en fonction de l'angle de frottement interne du remblai par :

$$K_a = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}; K_p = \frac{1}{K_a} \quad (3- 8)$$

### 3.1.6 Détermination d'un champ dans la coque

Compte tenu des hypothèses sur l'interface (supposée lisse), sur le caractère négligeable du poids propre et la forme particulière que l'on a choisie pour le champ de contraintes dans le remblai, on a :

$$F_\theta = 0; F_z = 0; F_r = -\lambda\gamma(z - H) \quad (3- 9)$$

Il faut maintenant trouver un champ de contraintes généralisées dans la coque satisfaisant les équations d'équilibre (3- 2) compte tenu de (3- 9). On peut prendre simplement :

$$N_{zz} = 0; N_{z\theta} = 0; N_{\theta\theta} = \lambda\gamma R(H - z) \text{ et } \underline{M} = 0 \quad (3- 10)$$

Il faut encore que ce champ (3- 10) satisfasse le critère de résistance de la coque. Compte tenu de  $N_{zz}=N_{z\theta}=0$ , le critère s'écrit de manière générale :

$$N'_0 \leq N_{\theta\theta} \leq N_0 \quad (3- 11)$$

La condition pour que le critère soit vérifié partout compte tenu que  $N'_0 \leq 0 \leq N_{\theta\theta}$ , s'écrit simplement :

$$\lambda\gamma RH \leq N_0 \quad (3- 12)$$

On reconnaît la formule dite des tuyaux ou des chaudronniers  $N=pR$ , avec  $p$  la pression dans le cylindre et  $N$  l'effort normal.

#### 3.1.7 Obtention d'une borne inférieure

La condition la moins sévère dans (3- 12) est obtenue pour  $\lambda = K_a$ . On en déduit que si la condition suivante est vérifiée

$$\frac{\gamma RH}{N_0} \leq K_p \quad (3- 13)$$

alors, le chargement  $\gamma$  est potentiellement supportable.

On peut reformuler ce résultat en terme de minorant du chargement potentiellement supportable  $\gamma^+$  :

$$\frac{\gamma^+ RH}{N_0} = \left( \frac{\gamma RH}{N_0} \right)^+ \geq K_p \quad (3- 14)$$

Cette minoration du chargement maximal potentiellement supportable est bien de la forme (3- 1) déduite de l'analyse dimensionnelle avec la simplification que le minorant ne dépend que de  $\varphi$  (et pas de  $H/R$ ).

### 3.1.8 Validité de l'hypothèse « poids propre de la coque négligeable »

Si on prend en compte le poids surfacique  $\gamma_s$  de l'enceinte de palplanches ( $F_z = -\gamma_s$ ), on peut choisir le champ suivant :

$$N_{zz} = \gamma_s(z-H); N_{z\theta} = 0; N_{\theta\theta} = \lambda\gamma R(H-z) \quad (3-15)$$

Prenons un exemple numérique :

$$R=10 \text{ m} ; \gamma=16 \text{ kNm}^{-3} ; \gamma_s=1,5 \text{ kNm}^{-2} ; \varphi=30^\circ$$

On trouve alors :  $\left| \frac{N_{zz}}{N_{\theta\theta}} \right| = \varepsilon \approx 0,03$

Pour évaluer l'effet de la prise en compte de  $N_{zz}$  sur le minorant du chargement maximal potentiellement supportable, il faut se donner une loi d'interaction ( $N_{zz}$ ,  $N_{\theta\theta}$ ).

Si on a  $N_{\theta\theta} = 0$ , la condition de résistance s'écrit  $|N_{zz}| \leq N_0''$ ; si on a  $N_{zz} = 0$ , la condition de résistance s'écrit  $N_{\theta\theta} \leq N_0$ . Compte tenu du type des sections de palplanches utilisées, on peut supposer en première approximation  $N_0'' \approx N_0$ . On détermine ainsi un domaine (figuré en pointillé) inclus dans le domaine de résistance (Figure 3-3), en prenant en plus  $|N_0'| \approx N_0$ .

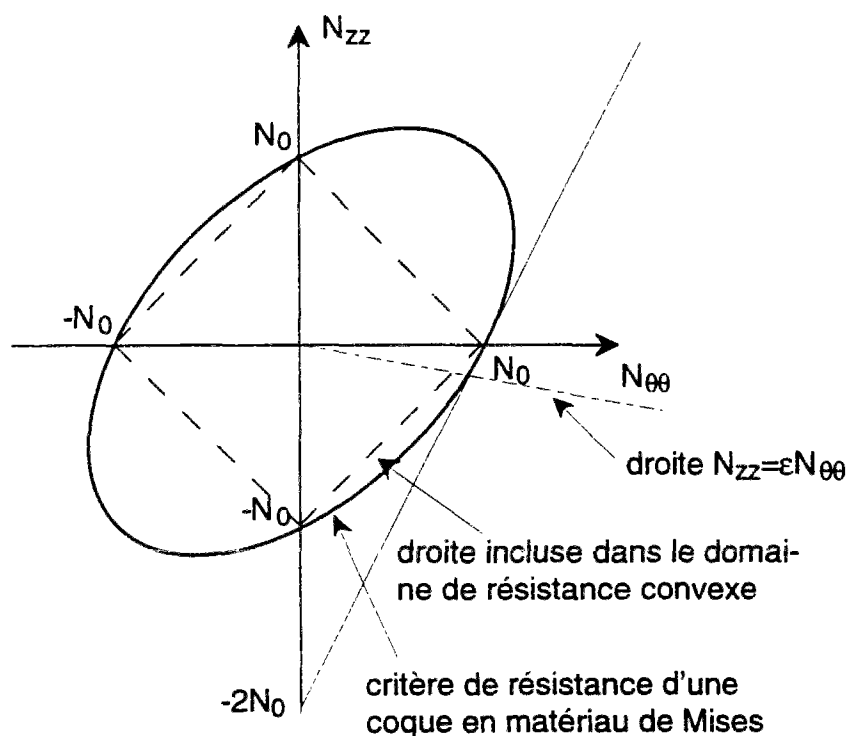


Figure 3- 3 Interaction  $N_z/N_{\theta\theta}$

En supposant le domaine de résistance convexe, on en déduit alors que la diminution du minorant du chargement potentiellement supportable est inférieure à  $|N_{zz}/N_{\theta\theta}|$  soit dans notre exemple numérique 3%.

Si on suppose maintenant que la coque de palplanches se comporte comme une coque homogène en matériau de Mises, on trouve une autre valeur de la réduction de ce minorant. La condition de résistance en  $(N_{zz}, N_{\theta\theta})$ , s'écrit (voir annexe) en prenant en compte que  $N_{z\theta} = 0$  et que le tenseur  $\underline{\underline{M}}$  des moments fléchissants est nul :

$$N_{\theta\theta}^2 + N_{zz}^2 - N_{zz}N_{\theta\theta} \leq N_0^2 \quad (3- 16)$$

En dérivant l'équation (3- 16), on trouve que la pente de la tangente au point  $N_{\theta\theta} = N_0, N_{zz} = 0$  est égale à 2 (Figure 3- 3). On en déduit alors que la réduction du minorant dans notre exemple numérique vaut 1,5%.

## 3.2 Étude du problème auxiliaire d'une coque soumise à une pression hydrostatique

### 3.2.1 Introduction d'un problème auxiliaire

Nous nous proposons maintenant d'améliorer les résultats de l'étude statique menée précédemment (§ 3.1) en prenant en compte désormais la résistance à la flexion des palplanches. Le champ de contraintes dans le remblai que nous avons considéré est tel que les efforts exercés par le remblai sur la coque sont identiques à une distribution de pression hydrostatique.

Nous allons donc considérer le problème de calcul à la rupture d'une coque cylindrique soumise à une telle distribution de pression hydrostatique (Figure 3-4). La pression hydrostatique est caractérisée par sa valeur maximale  $P$  atteinte à la base du cylindre.

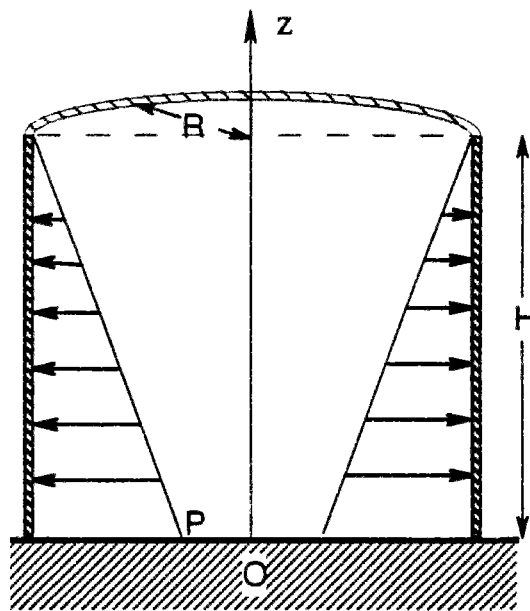


Figure 3-4 Coque soumise à une distribution de pression hydrostatique

Comme il s'agira ensuite d'appliquer les résultats de ce problème auxiliaire à l'étude statique du problème du gabion isolé, on pourrait se contenter d'une étude statique de ce problème auxiliaire. Mais sous certaines hypothèses concernant le critère de résistance de la coque, il sera possible d'obtenir des solutions exactes, ce qui nécessitera d'appliquer également la méthode cinématique à ce problème auxiliaire.

## 3.2.2 Rappel des travaux antérieurs

### 3.2.2.1 Analyse limite des plaques et des coques

Au cours des années 50, on a assisté à un grand développement des travaux théoriques sur l'analyse limite ; on peut citer entre autres Drucker et al. (1951, 1952), Hill (1951), Bishop (1953), Drucker (1956)... C'est dans ce contexte que l'application de l'analyse limite aux plaques et aux coques va se développer <sup>1</sup>. Le cas particulier des plaques et des coques axisymétriques avec chargement également axisymétrique a été particulièrement étudié (Tableau 3-1).

	CRITERES UTILISES	APPLICATIONS		
		GEOMETRIE	CONDITIONS AUX LIMITES	CHARGEMENT
DRUCKER, 1954	critère de Tresca	cylindrique de longueur infinie		forces radiales sur un cercle ou pression uniforme sur une bande ; pas d'effort axial
HODGE, 1954	approximation linéaire de Tresca	cylindrique	bords simplement appuyés	pression uniforme extérieure avec effort axial
ONAT et PRAGER, 1954	critère de Tresca	calotte sphérique	bord encasté	pression intérieure uniforme
EASON et SHIELD, 1955	critère simple	cylindrique	bords libres	comme (Drucker, 1954) mais avec effort axial
ONAT, 1955	critère de Tresca	cylindrique	un bord encasté, l'autre libre	pression intérieure uniforme avec effort axial
DRUCKER et SHIELD, 1959	approximations du critère de Tresca	raccord toroïdal	bords encastés	pression intérieure uniforme
OLSZAK et SAWCZUK, 1959	critères simples pour coques orthotropes	cylindrique	conditions variées	pression intérieure hydrostatique ou uniforme
HODGE, 1960	critère de Tresca et différentes approximations	calotte sphérique	bord simplement appuyé ou encasté	pression intérieure uniforme
HODGE, 1961	critères de Mises et de Tresca	cylindrique		
FLÜGGE et NAKAMURA, 1965	approximation affinée du critère de Tresca	cône tronqué	un bord encasté, l'autre libre	densité linéique uniforme de forces sur le bord libre
CINQUINI et al., 1984	approximation du critère de Mises	cylindrique	nombreux cas étudiés	pression intérieure hydrostatique

Tableau 3-1 Travaux divers sur l'analyse limite des coques cylindriques

<sup>1</sup> La théorie élastique des plaques et des coques s'est développée au XIX<sup>ème</sup> siècle ; on peut citer concernant plus particulièrement les plaques, les travaux précurseurs de Lagrange (1811), de Poisson (mémoire de 1828) et les travaux de Kirchhoff (1850). On situe les débuts de la théorie de la plasticité en 1868 (travaux de Tresca). On peut faire remonter (Salençon, 1983) l'origine des méthodes de l'analyse limite sous la forme de raisonnements de calcul à la rupture jusqu'à Galilée (1638) et Coulomb (1773) et retracer la progression de ces idées au XIX<sup>ème</sup> siècle en citant notamment Méry (1840) et Culmann (1866).

Il est donc un peu surprenant (Hodge, 1963), que l'étude de l'analyse limite ou du comportement plastique des plaques et des coques ait été en pratique inaugurée bien plus tard. Les premiers développements de l'analyse limite appliquée aux plaques semblent dus à Johansen (1943) et ils ne comportaient que l'utilisation de la méthode cinématique. C'est à Pell et Prager (1951) que reviendrait d'avoir déterminé pour la première fois des bornes inférieures et supérieures pour un problème d'analyse limite de plaque.

### 3.2.2.2 Critères de résistance

Les différents travaux cités précédemment (Tableau 3-1) montrent que l'intérêt des auteurs a été très orienté vers la question du critère de résistance à prendre en compte portant sur  $\underline{N}$  et  $\underline{M}$ . Ils ont presque tous considéré que le critère de Tresca isotrope représentait la réalité et beaucoup ont proposé des approximations de ce critère pour pouvoir mener les calculs jusqu'au bout. La manipulation du critère de résistance d'une coque dérivée du critère de Tresca n'est pas aisée, même en se limitant au cas axisymétrique (comme le font tous les auteurs cités dans le Tableau 3-1). La restriction au cas axisymétrique permet de ne pas avoir à considérer un écart éventuel entre les axes principaux du tenseur  $\underline{N}$  et du tenseur  $\underline{M}$ .

Dans l'étude de notre problème auxiliaire, nous allons rencontrer plusieurs simplifications supplémentaires que nous justifierons en détail plus loin : l'effort normal  $N_{zz}$  est nul, le moment fléchissant  $M_{\theta\theta}$  est une auto-contrainte. Le critère dont nous aurons besoin ne portera finalement que sur  $N_{\theta\theta}$  et  $M_{zz}$ .

Dans ce dernier cas, plusieurs des critères simplifiés conduisent à un critère de la forme :

$$|N_{\theta\theta}| \leq N_0 ; |M_{zz}| \leq M_0 \quad (3-17)$$

C'est notamment le cas de Eason et Shield (1955) avec les valeurs suivantes pour  $N_0$  et  $M_0$  en désignant par  $e$  l'épaisseur de la coque et par  $\sigma_0$  la résistance du matériau constitutif en traction simple:

$$N_0 = \sigma_0 e ; M_0 = \frac{\sigma_0}{4} e^2 \quad (3-18)$$

Drucker et Shield (1959) ont proposé l'emploi d'un critère de résistance des coques simple qui peut être considéré comme une approximation du critère de résistance d'une coque constituée d'un matériau de Tresca. Pour le cas qui nous intéresse ( $N_{zz}=0$ ) ce critère se réduit au critère (3-17). Ce critère, compte tenu de (3-18), contient le critère de Tresca ; en remplaçant  $\sigma_0$  par  $\sigma'_0 = 3/4 \sigma_0$ , ce critère est contenu dans le critère de Tresca pour le cas  $N_{zz}=0$ . Olszak et Sawczuk (1959) partent d'un critère de résistance du matériau anisotrope :

$$|\sigma_{zz}| \leq \sigma'_0 ; |\sigma_{\theta\theta}| \leq \sigma''_0 \quad (3-19)$$

Ils arrivent ainsi pour la coque au même critère (3-17) sans avoir pour autant les relations (3-18).



### 3.2.2.3 Cylindre soumis à une pression hydrostatique

Parmi les divers auteurs cités précédemment, seuls Olszak et Sawczuk et Cinquini et al. ont étudié le cas d'un cylindre circulaire vertical soumis à une pression hydrostatique interne.

Pour l'étude du cas du cylindre vertical soumis à une pression hydrostatique interne, Olszak et Sawczuk se sont basés sur le critère (3- 17). Ils ont présenté avec un degré de détail variable, le cas du bord supérieur libre et le cas où les deux bords sont simplement appuyés. Le tableau suivant résume les cas traités parmi toutes les combinaisons possibles :

bord supérieur	bord inférieur	"longueur" de la coque
libre	encastré	courte
libre	appuyé	courte
libre	libre	courte
appuyé	appuyé	courte
appuyé	appuyé	moyenne
appuyé	appuyé	longue

Tableau 3-2 Cas de coques soumis à une pression hydrostatique étudiés (Olszak et Sawczuk, 1959)

De manière qualitative, dans le tableau ci-dessus on entend par coque « courte », une coque pour laquelle la hauteur n'est pas grande par rapport au rayon et l'épaisseur n'est pas très faible devant la hauteur. La coque « longue » est la situation inverse et la coque dite « moyenne » représente la situation intermédiaire.

Pour les différents cas du Tableau 3-2, Olszak et Sawczuk ont déterminé une solution exacte pour le critère de résistance retenu (3- 17). Mais ces résultats ne peuvent pas être appliqués directement au cas des gabions cellulaires. En effet parmi les cas traités où le bord supérieur est libre, seul est abordé le cas des coques "courtes". Les gabions cellulaires se trouvent dans le cas des coques "longues" et les solutions sont alors différentes du cas des coques courtes.

Le cas des coques longues diffère du cas des coques courtes notamment par le fait que la solution statique n'est pas unique : la valeur des efforts est déterminée de manière unique seulement dans la partie inférieure de la coque et il faut ensuite prolonger les solutions à l'ensemble de la coque. Cette opération doit être faite de telle sorte que l'on puisse déterminer exactement la limite de validité de chaque solution (c'est à dire les limites entre les valeurs des paramètres pour lesquels on a une coque courte, une coque longue ou éventuellement une coque moyenne).

Cinquini et al. (1984) ont étudié toutes les combinaisons possibles entre les conditions au bord supérieur et au bord inférieur. Leur choix d'un critère un peu plus complexe que Olszak et Sawczuk ne leur a pas permis le calcul analytique aussi

loin que ces derniers. Les résultats finaux sont fournis exclusivement sous forme de graphiques et les valeurs des paramètres utiles pour les applications aux gabions ne sont malheureusement pas couvertes par ces graphiques.

### 3.2.3 Position du problème auxiliaire

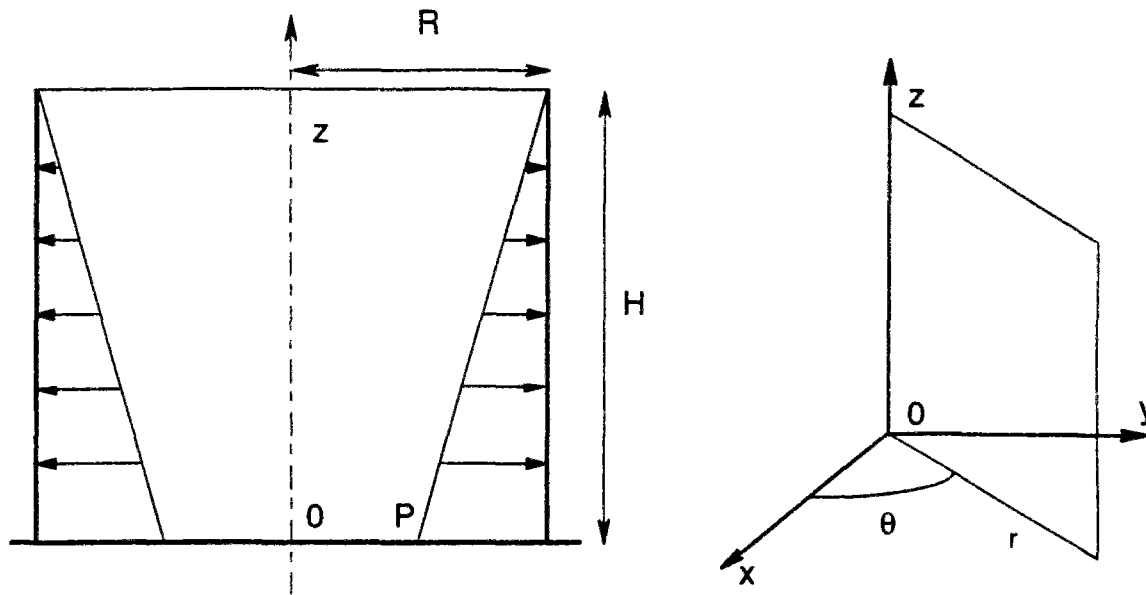


Figure 3-5 Géométrie du problème et chargement

La coque cylindrique a pour hauteur  $H$  et pour rayon  $R$ . L'axe vertical  $Oz$  est l'axe de symétrie du cylindre, l'origine  $O$  est à la base du cylindre. On utilise un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

On néglige le poids propre de la coque. Les seules forces extérieures agissant sur la coque sont les réactions à la base du cylindre et la pression  $p(z)$  due au fluide de la forme :

$$p(z) = P \frac{(H - z)}{H} \quad (3-20)$$

On supposera toujours le bord supérieur libre. Pour le bord inférieur, on étudiera trois cas de conditions aux limites correspondant au cas du gabion sur substratum rocheux :

- bord libre ; pas de moment, pas de force horizontale
- bord appuyé ; pas de moment, pas de déplacement horizontal
- bord encastré ; pas de déplacement horizontal, pas de rotation du bord de la coque.

On suppose le substratum rigide. Compte tenu des types de conditions aux limites que nous venons de retenir, Il reste donc à définir le critère de la coque. Les calculs seront menés avec un seul critère portant sur  $N_{\theta\theta}$  et  $M_{zz}$ .

On retient le critère très simple  $|N_{\theta\theta}| \leq N_0$  ;  $|M_{zz}| \leq M_0$ . Nous avons vu (§ 3.2.2.2) que ce critère a été d'abord utilisé comme une simplification du critère de Tresca a ensuite été proposé pour les coques orthotropes (Olszak et Sawczuk, 1959). Dans le cas d'une enceinte en palplanches, il semble naturel, en l'absence de données plus précises, de prendre un critère simple comme celui utilisé par Olszak et Sawczuk.  $N_0$  dépend essentiellement de la résistance au dégrafage des palplanches,  $M_0$  dépend surtout de la résistance à la flexion de chaque palplanche.

### 3.2.4 Equations d'équilibre des coques de révolution

On rappelle les efforts dans une coque cylindrique de révolution soumise à un chargement axisymétrique. On peut se rapporter par exemple à (Bisch, 1993) ou à (Chen et Han, 1988).

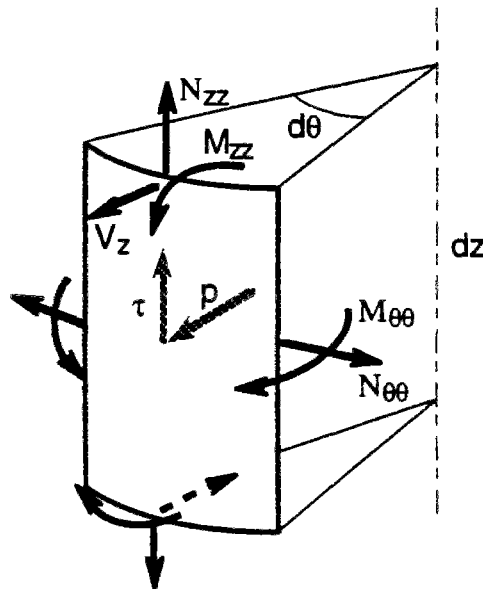


Figure 3-6 Efforts intérieurs dans un élément de coque axisymétrique

Compte tenu de la symétrie de révolution, on ne considère que des champs de contraintes ayant cette même symétrie. Cela nous donne que les composantes du tenseur de l'effort normal  $N_{z\theta}$  et  $N_{\theta z}$  sont nulles, que les composantes  $M_{z\theta}$  et  $M_{\theta z}$  du tenseur des moments fléchissants sont nulles, que la composante  $V_\theta$  du vecteur effort tranchant est nulle. Il suffit donc de considérer  $M_{zz}$ ,  $M_{\theta\theta}$ ,  $N_{zz}$ ,  $N_{\theta\theta}$ ,  $V_z$ , ces grandeurs ne dépendant que de  $z$ .

Les équations d'équilibre obtenues par exemple en exprimant l'équilibre en résultante et en moment d'un "petit élément" de coque (Figure 3-6) s'écrivent alors :

$$\frac{dV_z}{dz} + \frac{N_{\theta\theta}}{R} + p = 0 \quad (3- 21)$$

$$\frac{dM_{zz}}{dz} - V_z = 0 \quad (3- 22)$$

$$\frac{dN_{zz}}{dz} + \tau = 0 \quad (3- 23)$$

On élimine  $V_z$  entre ces deux premières équations (3- 21) et (3- 22) et on obtient :

$$\frac{d^2 M_{zz}}{dz^2} + N_{\theta\theta} + p = 0 \quad (3- 24)$$

L'équation (3- 23) nous donne que la composante  $N_{zz}$  est constante si la densité surfacique de forces extérieures tangentielles est nulle (ce qui est le cas dans notre problème). Elle est donc nulle puisqu'elle est nulle au bord supérieur toujours supposé libre.

Enfin, on remarque que ces équations ne donnent pas d'autre information sur  $M_{\theta\theta}$  qui apparaît dans notre problème comme une autocontrainte que l'on peut fixer arbitrairement.

### 3.2.5 Utilisation de variables adimensionnelles

On définit les variables adimensionnelles suivantes :

$$u = \frac{z}{H} \quad (3- 25)$$

$$n = \frac{N_{\theta\theta}}{N_0} \quad (3- 26)$$

$$m = \frac{M_{zz}}{M_0} \quad (3- 27)$$

$$f = \frac{PR}{N_0} \quad (3- 28)$$

$$k = \frac{RM_0}{H^2 N_0} \quad (3- 29)$$

Le rôle de  $u$ ,  $n$ ,  $m$  est clair : on a juste rendu adimensionnels la cote du point courant, l'effort normal et le moment fléchissant. On note que  $f$  va jouer le rôle de paramètre de chargement tandis que  $k$  sera le paramètre caractérisant les propriétés de géométrie et de résistance de la coque. C'est ce paramètre  $k$  qui permet de distinguer les coques « courtes » et les coques « longues ».

Dans le cas d'une coque mince homogène d'épaisseur  $e$ , on peut prendre  $N_0 = \sigma_0 e$  et  $M_0 = \sigma_0 e^2 / 4$ . Alors  $k$  peut s'écrire uniquement comme un paramètre géométrique :

$$k = \frac{1}{4} \frac{R}{H} \frac{e}{H} \quad (3-30)$$

Dans ce cas,  $k^1$  apparaît comme le produit d'un terme caractérisant l'élancement ( $R/H$ ), et d'un terme caractérisant la minceur de la coque ( $e/H$ ).

Le critère de résistance se récrit :

$$|m| \leq 1; |n| \leq 1 \quad (3-31)$$

L'équation d'équilibre (3-24) s'écrit, compte tenu de la relation  $p(z) = P(H-z)/H$  :

$$\frac{d^2 m}{d u^2} + \frac{1}{k} n - \frac{f}{k} (1-u) = 0 \quad (3-32)$$

La fonction  $n(u)$  étant bornée, on déduit de l'équation précédente que  $m$  et  $dm/du$  sont des fonctions continues.

Les conditions aux limites s'écrivent, compte tenu que  $dm/du=0$  est équivalent à  $V=0$  :

- pour le bord supérieur ( $u=1$ ) :

$$m(1)=0; m'(1)=0 \quad (3-33)$$

- pour le bord inférieur ( $u=0$ ) :

- bord libre

$$m(0)=0 ; m'(0)=0 \quad (3-34)$$

- bord appuyé

$$m(0)=0 \quad (3-35)$$

- bord encastré :

$$\text{pas de condition sur } m \quad (3-36)$$

---

<sup>1</sup> On retrouve alors à un facteur  $4/\sqrt{3(1-\nu^2)}$  près le « Batdorf » utilisé pour étudier la stabilité des coques minces (voir par exemple (Destuynder, 1990)).

### 3.2.6 Restriction de l'étude aux paramètres $f$ et $k$

Dans notre cas, le chargement dépend d'un seul paramètre : la pression à la base du cylindre. On note  $P^+$  le chargement extrême supportable. Le calcul à la rupture permet de combiner deux approches pour encadrer  $P^+$  : l'approche cinématique et l'approche statique. Dans la suite, nous utiliserons plutôt le paramètre de chargement adimensionnel  $f = \frac{PR}{N_0}$ .

Le problème se ramène alors à chercher  $f^+ = \frac{P^+R}{N_0}$  défini comme la valeur maximale de  $f$  telle qu'il existe les deux fonctions  $n(u)$  et  $m(u)$  satisfaisant l'équation d'équilibre (3- 32), le critère de résistance (3- 31), la condition à la limite sur le bord supérieur (3- 33) et la condition à la limite appropriée sur le bord inférieur (3- 34),(3- 35) ou (3- 36).

On voit que dans notre problème  $f^+$  sera fonction du seul paramètre  $k$  et on peut donc écrire :

$$\boxed{f^+ = f^+(k)} \quad (3- 37)$$

### 3.2.7 Utilisation de l'équilibre membranaire

L'approche statique consiste pour une valeur  $f^s$  du paramètre de chargement, à construire un champ de contraintes statiquement admissible ( c'est à dire satisfaisant les équations de l'équilibre ), équilibrant le chargement  $f^s$  et vérifiant en tout point le critère de résistance. Si on peut construire un tel champ, on en déduit que le chargement maximal supportable  $f^+$  vérifie l'inégalité suivante :

$$f^+ \geq f^s \quad (3- 38)$$

Une première approche statique simple est basée sur l'équilibre membranaire ( $m=0$ ). C'est ce qui a été fait au § 2.1.5. Si l'on construit un champ de contraintes avec  $m=0$  en tout point, l'équation d'équilibre donne  $n=f(1-u)$  ; le critère de résistance donne  $|n| \leq 1$ , d'où l'on déduit  $f \leq 1$  ; la valeur  $f=1$  est donc supportable. Pour tous les cas de condition aux limites sur le bord inférieur du cylindre, on conclut que :

$$\boxed{f^+ \geq 1} \quad (3- 39)$$

### 3.2.8 L'approche cinématique

L'approche cinématique résulte d'une dualisation de l'approche statique grâce au principe des puissances virtuelles. Sa mise en œuvre repose sur l'utilisation de

### Chapitre 3

mouvements virtuels cinématiquement admissibles (c'est à dire vérifiant toutes les conditions sur les vitesses imposées à la structure).

Pour un mouvement virtuel considéré et pour un chargement donné  $f$  on calcule la puissance des efforts extérieurs  $P_e$  et la puissance des efforts intérieurs  $P_i$ . Le principe des puissances virtuelles donne alors pour tout champ de contraintes  $\Sigma$  statiquement admissible ( $\Sigma$  est défini dans notre cas par  $\underline{N}$  et  $\underline{M}$ ) et pour tout mouvement virtuel  $\underline{U}$  cinématiquement admissible :

$$P_e(\underline{U}) + P_i(\Sigma, \underline{U}) = 0 \quad (3- 40)$$

La puissance des efforts intérieurs peut s'écrire comme une intégrale d'une densité de puissance des efforts intérieurs<sup>1</sup> :

$$P_i(\Sigma, \underline{U}) = \int p_i(\Sigma(x), \underline{U}) dx \quad (3- 41)$$

On note  $G(x)$  l'ensemble convexe des contraintes  $\Sigma$  satisfaisant le critère de résistance au point  $x$ . On définit la densité de puissance résistante maximale par :

$$\Pi(\underline{U}, x) = \sup\{-p_i(\Sigma(x), \underline{U}) / \Sigma(x) \in G(x)\} \quad (3- 42)$$

La puissance résistance maximale est définie comme l'intégrale de la densité de puissance résistante maximale :

$$P_{rm} = \int \Pi(\underline{U}, x) dx \quad (3- 43)$$

On obtient ainsi une condition nécessaire de stabilité pour chaque champ cinématiquement admissible :

$$P_{rm}(\underline{U}) \geq P_e(\underline{U}) \quad (3- 44)$$

On dit qu'un champ de vitesse cinématiquement admissible est pertinent si sa puissance résistante maximale est finie :

$$(\underline{U} \text{ pertinent}) \Leftrightarrow (P_{rm}(\underline{U}) < \infty) \quad (3- 45)$$

---

<sup>1</sup> L'expression de cette densité de puissance des efforts intérieurs dépend du type de modélisation mécanique utilisée pour décrire le système.

L'expression de la puissance des efforts intérieurs doit être complétée dans le cas où le champ  $\underline{U}$  présente des discontinuités (Salençon, 1983) par une intégrale prise sur le lieu géométrique de ces discontinuités.

Si pour un chargement  $f^c$  donné, on construit un champ de vitesse cinématiquement admissible tel que  $P_e > P_m$ , alors on conclut :

$$f^+ \leq f^c \quad (3-46)$$

On voit que la combinaison de l'approche statique par l'intérieur (3-38) et de l'approche cinématique (3-46) permet d'obtenir des encadrements de  $f^+$  :

$$f^s \leq f^+ \leq f^c \quad (3-47)$$

### 3.2.9 Champs de vitesse virtuels

Pour mettre en œuvre la méthode cinématique du calcul à la rupture, il faut construire des champs de vitesse cinématiquement admissibles adaptés à la modélisation adoptée pour le système et calculer pour ces champs la puissance des forces extérieures et la puissance résistante maximale.

Compte tenu de la symétrie cylindrique de notre problème, il est naturel de ne considérer que des champs de vitesse virtuelle ayant la même symétrie.

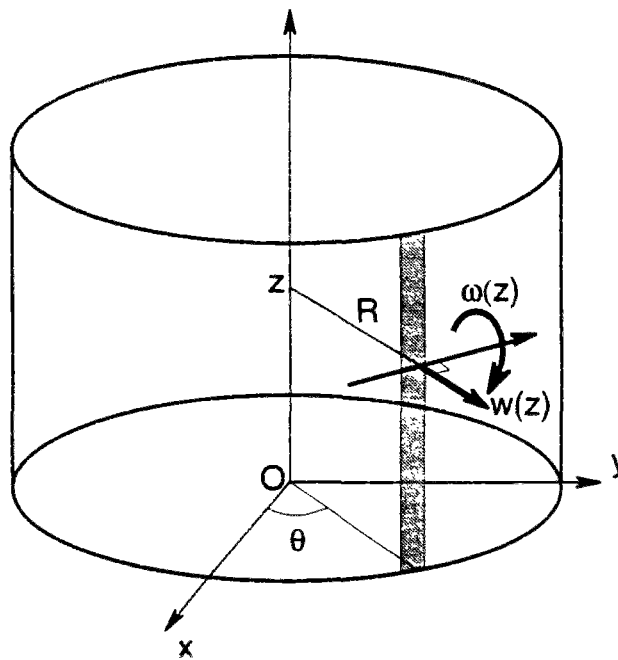


Figure 3-7 Champs de vitesse virtuels

Nous allons considérer les champs de vitesse virtuelle définis en tout point de la coque par la vitesse de la surface moyenne et par la vitesse de rotation de la normale (soit en fait la donnée en tout point d'un distributeur (Salençon, 1993-a)). Nous renvoyons également à l'annexe D.



La symétrie cylindrique impose que la vitesse virtuelle et la vitesse de rotation virtuelle ne dépendent que de  $z$ . Jointe à la symétrie par rapport à tout plan passant par l'axe  $Oz$ , elle impose également que la composante orthoradiale de la vitesse soit nulle ainsi que les composantes verticale et radiale de la vitesse de rotation.

Les champs que nous considérerons seront définis uniquement par une fonction  $w(z)$  qui est la vitesse radiale des points de la coque situés à la hauteur  $z$  et par  $\omega(z)$  qui est la composante orthoradiale de la vitesse de rotation<sup>1</sup> (Figure 3-7).

On peut alors obtenir l'expression suivante pour la densité surfacique de puissance des efforts intérieurs dans le mouvement virtuel, en tenant compte de la géométrie de la coque :

$$p_i = - \left( N_{\theta\theta} \frac{w}{R} + V_z \left( \frac{dw}{dz} - \omega \right) + M_{zz} \frac{d\omega}{dz} \right) \quad (3-48)$$

On en déduit que la densité de puissance résistante maximale  $\Pi(w, \omega)$  obtenue en substituant l'expression (3-48) dans la définition (3-42) :

$$\Pi(w, \omega) = \sup \left\{ \left( N_{\theta\theta} \frac{w}{R} + V_z \left( \frac{dw}{dz} - \omega \right) + M_{zz} \frac{d\omega}{dz} \right) / (N_{\theta\theta}, V_z, M_{zz}) \in G \right\} \quad (3-49)$$

### 3.2.10 Condition de pertinence des champs de vitesse virtuels

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où le critère de résistance  $G$  ne fait pas intervenir l'effort tranchant  $V_{zz}$ , ce qui est une hypothèse très généralement suivie.

On suppose pour l'instant que  $w$  et  $\omega$  sont continues ainsi que leurs dérivées. On voit alors que l'expression précédente de la densité de puissance résistante maximale (3-49) est infinie sauf si la condition suivante est satisfaite :

$$\frac{dw}{dz} - \omega = 0 \quad (3-50)$$

Cette condition est la condition pour que les mouvements particuliers que nous étudions (définis uniquement par  $w$  et  $\omega$ ) soient des mouvements de Kirchhoff-Love, c'est à dire des mouvements tels que les normales à la surface restent normales à la surface. Dans ce cas, il n'y a pas de terme dû à l'effort tranchant dans l'expression de la puissance des efforts intérieurs (Hodge, 1963).

Nous retrouvons ainsi l'hypothèse de Kirchhoff-Love comme une condition de pertinence pour les champs de vitesse virtuelle.

---

<sup>1</sup> Dans l'annexe D, plus générale, la quantité désignée ici par  $\omega$  est la composante  $\omega_s$  (ou  $\omega_\theta$ ) du vecteur  $\underline{\omega}$  et on a  $\omega_\theta = v_z$ .

Les champs de vitesse virtuelle étudiés, qui dépendaient, a priori, de deux fonctions indépendantes  $w$  et  $\omega$ , s'avèrent ne dépendre que d'une fonction compte tenu de la condition de pertinence que nous venons d'écrire.

L'expression de la puissance résistante maximale se simplifie en :

$$\Pi(w, \omega) = \sup \left\{ \left( N_{\theta\theta} \frac{w}{R} + M_{zz} \frac{d\omega}{dz} \right) / (N_{\theta\theta}, M_{zz}) \in G \right\} \text{ si } \frac{dw}{dz} - \omega = 0 \quad (3- 51)$$

$$\Pi(w, \omega) = +\infty \text{ si } \frac{dw}{dz} - \omega \neq 0 \quad (3- 52)$$

### 3.2.11 Discontinuités des champs de vitesse virtuels

Il faut également envisager le cas de discontinuité des champs de vitesse virtuelle<sup>1</sup> (Salençon, 1983, 1993-a).

Prenant en compte l'expression (3- 48) de la puissance des efforts intérieurs, on évalue la puissance des efforts intérieurs comme l'intégrale de la densité de puissance des efforts intérieurs sur la coque.

$$P_i = -2\pi R \int_0^H \left( N_{\theta\theta} \frac{w}{R} + V_z \left( \frac{dw}{dz} - \omega \right) + M_{zz} \frac{d\omega}{dz} \right) dz \quad (3- 53)$$

Comme pour le cas du milieu tridimensionnel, il se pose sur le plan mathématique, le problème du choix des conditions de régularité à imposer aux champs de vitesse virtuels. La condition de pertinence impose de supposer que  $w$  est continue<sup>2</sup>.

On peut par contre considérer le cas où  $dw/dz$  présente un nombre fini  $n$  de points de discontinuité et est dérivable en dehors de ces points  $z_i$ . A chacun de ces points de discontinuité, le saut de  $\omega = dw/dz$  noté  $[[w']]_i$  doit être fini<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Ceci est justifié par des considérations pratiques (construction de cinématiques simples donnant néanmoins des indications utiles) mais aussi par des considérations plus théoriques sur les propriétés des solutions exactes comme l'illustrera le résultat de l'étude de ce problème auxiliaire.

<sup>2</sup> Par analogie avec le choix fait pour le milieu 3D, il semble assez naturel dans notre cas, de choisir  $w$  et  $\omega$  intégrables et dont les dérivées premières soient des mesures bornées. Ceci permet de calculer la puissance des efforts intérieurs pour toute répartition bornée et continue des efforts intérieurs. Cet espace des fonctions intégrables dont la dérivée première au sens des distributions est une mesure bornée, est l'espace des fonctions à variations bornées et est noté BV.

C'est la prise en compte de la condition de pertinence (due à l'absence de critère sur  $V_z$ ) qui va amener à restreindre davantage le choix de  $w$ . Cette condition impose que  $dw/dz$  soit égale à  $\omega$ . On retrouve finalement dans notre cas particulier l'espace appelé HB introduit par Demangel pour l'étude de la plasticité des plaques (Temam, 1983) : espace des fonctions qui appartiennent à  $L^1$  ainsi que leurs dérivées premières, les dérivées secondes étant des mesures bornées. On sait qu'alors la fonction  $w$  est continue sur l'ouvert de définition de ces fonctions et également sur la fermeture de cet ouvert. Comme  $dw/dz$  (égale à  $\omega$ ) est une fonction à variation bornée, elle admet au plus un ensemble dénombrable de points de discontinuité.

<sup>3</sup> Notons que la condition " $w$  continue et deux fois dérivable sauf éventuellement en un nombre fini de points" ne suffit pas. On peut considérer par exemple la fonction  $w$  nulle sur  $[0, 1/2]$  et égale à  $\sqrt{x-1/2}$  sur  $[1/2, 1]$ .

L'expression de la puissance des efforts intérieurs devient alors :

$$P_i = -2\pi R \int_0^H \left( N_{\theta\theta} \frac{w}{R} + M_{zz} w'' \right) dz - 2\pi R \sum_{i=1}^n M_{zz}(z_i) \llbracket w' \rrbracket_i \quad (3-54)$$

Dans l'expression ci-dessus,  $w'$  (respectivement  $w''$ ) désigne la fonction qui est égale à la dérivée première (respectivement seconde) de  $w$  sur tous les intervalles  $]z_i, z_{i+1}[$ , alors qu'auparavant,  $dw/dz$  (respectivement  $d^2w/dz^2$ ) désignait la dérivée première (respectivement seconde) de  $w$  au sens des distributions.

On déduit de l'expression de la puissance des efforts intérieurs (3-54) la densité linéique de puissance résistante maximale associée à une discontinuité de  $dw/dz$  :

$$\Pi(\llbracket w' \rrbracket) = \sup \{ M_{zz} \cdot \llbracket w' \rrbracket / M_{zz} \in G \} \quad (3-55)$$

### 3.2.12 Fonctions $\Pi$ pour le critère en $M_{zz}$ et $N_{\theta\theta}$ sans interaction

On se place dans le cas du critère (3-17), que nous rappelons ci-dessous :

$$|N_{\theta\theta}| \leq N_0 ; |M_{zz}| \leq M_0 \quad (3-17)$$

Les fonctions  $\Pi$  se déterminent à partir de l'expression de la densité de puissance des efforts intérieurs et du critère (Salençon, 1983). On applique les expressions déjà obtenues (3-51), (3-52) pour les densités de puissance résistante maximale dans le cas où  $w$  est deux fois dérivable :

$$\Pi(w, \omega) = N_0 \left| \frac{w}{R} \right| + M_0 |w''| \text{ si } w' - \omega = 0 \quad (3-56)$$

$$\Pi(w, \omega) = +\infty \text{ si } w' - \omega \neq 0 \quad (3-57)$$

Dans le cas de discontinuité des fonctions  $w$  et  $\omega$ , on utilise les résultats obtenus en 3.2.11 et notamment l'expression (3-55) :

$$\Pi(\llbracket w \rrbracket, \llbracket \omega \rrbracket) = M_0 |\llbracket w' \rrbracket| \text{ si } \llbracket w \rrbracket = 0 \quad (3-58)$$

$$\Pi(\llbracket w \rrbracket, \llbracket \omega \rrbracket) = +\infty \text{ si } \llbracket w \rrbracket \neq 0 \quad (3-59)$$

On a tenu compte dans l'expression (3-58) du fait que l'on suppose la condition de Kirchhoff-Love vérifiée de part et d'autre du point de discontinuité.

### 3.2.13 Utilisation des variables adimensionnelles dans l'approche cinématique

Nous avons posé les équations de l'approche statique en variables adimensionnelles en 3.2.5. De même, nous allons maintenant poser l'approche cinématique en variables adimensionnelles. A cet effet, nous introduisons une variable adimensionnelle supplémentaire  $v$ , définie par :

$$v = \frac{w}{w_0} \quad (3- 60)$$

On note  $w_0$  une vitesse caractéristique du mouvement virtuel strictement positive. Écrivons pour commencer, la puissance des efforts extérieurs qui sont ici uniquement les forces de pression :

$$P_e = 2\pi R \int_0^H w(z).p(z)dz \quad (3- 61)$$

On remplace dans l'expression ci-dessus  $p(z)$  par  $P(1-z/H)$  et on remplace les différentes variables par les variables adimensionnelles correspondantes. On obtient :

$$P_e = 2\pi w_0 R H P \int_0^1 v(u).(1-u)du \quad (3- 62)$$

Compte tenu des valeurs des fonctions  $\Pi$  que nous avons trouvées, la puissance résistante maximale s'écrit de la manière suivante pour un champ de vitesse virtuel vérifiant la condition de Kirchhoff-Love, avec  $w$  continue et deux fois dérivable sauf en un nombre fini de points :

$$P_{rm} = 2\pi R \int_0^H \left( N_0 \left| \frac{w}{R} \right| + M_0 |w''| \right) dz + 2\pi R \sum_{i=1}^n M_0 |\llbracket w' \rrbracket_i| \quad (3- 63)$$

Comme pour la puissance des efforts extérieurs, nous remplaçons les diverses variables par les variables adimensionnelles correspondantes dans l'expression de la puissance résistante maximale :

$$P_{rm} = 2\pi w_0 H N_0 \left\{ \int_0^1 |v| + k|v''| du + k \sum_{i=1}^n |\llbracket v' \rrbracket_i| \right\} \quad (3- 64)$$

La condition nécessaire de stabilité  $P_e \leq P_{rm}$  s'écrit maintenant compte tenu des expressions (3- 62) et (3- 64) :

$$\int_0^1 v(1-u)du \leq \left\{ \int_0^1 |v| + k|v''| du + k \sum_{i=1}^n |\llbracket v' \rrbracket_i| \right\} \quad (3- 65)$$

Les seuls champs conduisant à une majoration de  $f^+$  sont les champs tels que la puissance des forces extérieures est strictement positive. Avec de tels champs, on obtient la majoration suivante de  $f^+$  :

$$f^+ \leq \frac{\left\{ \int_0^1 |v| + k |v''| du + k \sum_{i=1}^n \left| \llbracket v' \rrbracket_i \right| \right\}}{\int_0^1 v(1-u) du} \quad \text{pour } \int_0^1 v(1-u) du > 0 \quad (3- 66)$$

Comme l'approche statique, l'approche cinématique nous donne des bornes pour  $f^+$  qui ne dépendent que de  $k$  et des conditions aux limites. Précisons les conditions aux limites à vérifier par les champs de vitesse virtuels  $v(u)$  :

- pour le bord supérieur :

$$\text{pas de condition sur } v \quad (3- 67)$$

- pour le bord inférieur :

- bord libre

$$\text{pas de condition sur } v \quad (3- 68)$$

-bord appuyé

$$v(0)=0 \quad (3- 69)$$

-bord encastré

$$v(0)=v'(0)=0 \quad (3- 70)$$

### 3.2.14 Étude cinématique du cas du bord inférieur libre

Nous allons commencer l'étude du cylindre à bord libre par l'approche cinématique. Pour cela nous envisagerons deux classes de mécanismes. Chacune de ces classes de mécanismes donnera, après optimisation, un majorant de  $f^+$  qui sera noté  $f^c$  et sera fonction de  $k$ . Nous retiendrons pour chaque valeur de  $k$  la valeur de  $f^c$  la plus petite donnée par les deux classes de mécanismes.

Nous construirons ensuite, avec l'aide du théorème d'association, des champs statiques associés, ce qui permettra de conclure que nous avons déterminé la solution exacte.

### 3.2.14.1 Étude d'un mécanisme avec une ligne de discontinuité (charnière)

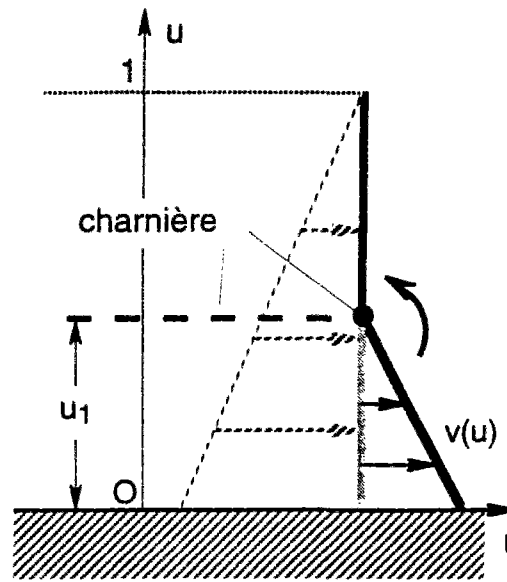


Figure 3-8 Mécanisme à une charnière dans le cas du bord inférieur libre

Le mécanisme (Figure 3-8) est entièrement décrit par la donnée de  $v(u)$ , compte tenu de la condition de Kirchhoff-Love. Nous choisirons exclusivement dans la suite des champs de vitesse virtuels vérifiant cette condition puisque, sinon, les champs ne sont pas pertinents pour le critère que nous étudions. On rappelle que pour le cas étudié à présent, les conditions aux limites (3- 67), (3- 68) n'imposent pas de restriction sur les champs cinématiques.

On note  $u_1$  la cote adimensionnelle de la charnière; on a :  $0 < u_1 < 1$ . Le champ  $v(u)$  est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} v &= 1 - \frac{u}{u_1} \quad \text{si } 0 \leq u \leq u_1 \\ v &= 0 \quad \text{si } u_1 \leq u \leq 1 \end{aligned} \quad (3- 71)$$

Il faut maintenant calculer la puissance des efforts extérieurs  $P_e$  et la puissance résistante maximale  $P_m$ . Calculons d'abord la puissance des efforts extérieurs grâce à l'expression (3- 62) :

$$\frac{P_e}{2\pi w_0 RHP} = \frac{1}{2} u_1 \left(1 - \frac{u_1}{3}\right) \quad (3- 72)$$

On vérifie que cette puissance est strictement positive si  $0 < u_1 < 1$ .

Il faut maintenant calculer la puissance résistante maximale des efforts intérieurs. Pour cela, comme le montre (3- 64), il faut calculer  $v''$  et  $\llbracket v' \rrbracket$ . On calcule d'abord  $v'$  :

$$v' = -\frac{1}{u_1} \text{ si } 0 \leq u \leq u_1 \quad (3- 73)$$

$$v' = 0 \text{ si } u_1 \leq u \leq 1 \quad (3- 74)$$

On détermine ensuite la valeur de  $v''$  et la valeur de  $\llbracket v' \rrbracket$  au point  $u=u_1$  (qui est égale à  $v'(u_1+0)-v'(u_1-0)$ ) :

$$\llbracket v' \rrbracket = \frac{1}{u_1} \text{ pour } u = u_1 \quad (3- 75)$$

$$v''=0 \quad (3- 76)$$

En substituant dans l'expression générale de la puissance résistante maximale (3- 64) les valeurs que nous venons de déterminer pour  $v$ ,  $v''$  et  $\llbracket v' \rrbracket$ , nous obtenons :

$$\frac{P_{rm}}{2\pi w_0 H N_0} = \frac{u_1}{2} + k \frac{1}{u_1} \quad (3- 77)$$

Sous réserve du respect de l'encadrement  $0 < u_1 < 1$ , on peut écrire la condition nécessaire de stabilité (3- 66), et on obtient :

$$f^+ \leq \frac{1 + 2k/u_1^2}{1 - u_1/3} = f_1^c(k, u_1) \quad (3- 78)$$

Il faut déterminer pour chaque valeur de  $k$  le mécanisme optimal dans la classe de mécanisme envisagée. Pour cela, il faut pour chaque valeur de  $k$ , trouver la valeur de  $u_1$  satisfaisant  $0 < u_1 < 1$  et minimisant  $f_1^c$ . On calcule la dérivée par rapport à  $u_1$  de  $f_1^c$ , on cherche la condition pour que cette dérivée soit nulle et on obtient :

$$u_1^3 + 6ku_1 - 12k = 0 \quad (3- 79)$$

Cette équation du troisième degré en  $u_1$  admet une seule racine réelle  $u_1^*$  et cette racine est positive comme le montre l'examen des signes des coefficients (on tient compte de  $k > 0$ ).

On vérifie que la condition  $u_1^* < 1/3$  est satisfaite si et seulement si :

$$k < \frac{1}{6} \quad (3- 80)$$

On peut résoudre «avec des radicaux» l'équation donnant  $u_1^*$ . On obtient :

$$u_1^* = \sqrt[3]{A} - \frac{2k}{\sqrt[3]{A}} \text{ avec } A = 6k + 2k\sqrt{2k+9} \quad (3- 81)$$

Il va s'avérer plus facile de manipuler  $k$  comme fonction de  $u_1^*$ . On a ainsi :

$$k = \frac{(u_1^*)^3}{6(2 - u_1^*)} \quad (3- 82)$$

Dans l'expression de  $f_1^c(k, u_1)$ , on remplace  $u_1$  par  $u_1^*$  et  $k$  par son expression en fonction de  $u_1^*$ , on obtient :

$$f_1^c(k, u_1^*(k)) = f_1^c(k) = \frac{2}{2 - u_1^*} \quad (3- 83)$$

De l'expression précédente, on tire  $u_1^* = 2 - 1/f_1^c(k)$ . En remplaçant dans (3- 82)  $u_1^*$  par son expression en fonction de  $f_1^c(k)$ , on obtient :

$$k = \frac{2 (f_1^c - 1)^3}{3 (f_1^c)^2} \quad (3- 84)$$

Nous avons ainsi obtenu  $f_1^c(k)$  de manière implicite comme solution d'une équation du troisième degré qui admet exactement une solution satisfaisant  $f_1^c > 1$  (l'examen de l'équilibre membranaire nous a donné que  $f \geq 1$ ). On peut résoudre explicitement cette équation mais, là encore, la forme implicite est nettement plus maniable.

Cette étude d'un mécanisme avec charnière doit être complétée si l'on veut couvrir toutes les valeurs possibles de  $k$  puisque le résultat que nous venons d'obtenir (3- 84) suppose que la condition  $k < 1/6$  est satisfaite (3- 80) ce qui correspond à  $f_1^c = 2$ .



### 3.2.14.2 Étude d'un mécanisme sans charnière

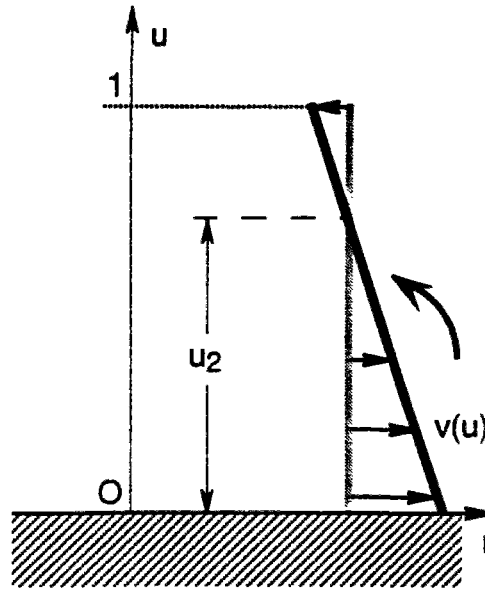


Figure 3-9 Mécanisme sans charnière pour le cylindre à bord libre

Cette classe de mécanismes est paramétrée par  $u_2$  qui désigne maintenant la cote adimensionnelle des points dont la vitesse est nulle. Les mécanismes sont entièrement décrits par la donnée de  $v(u)$  qui est normalisée (comme dans le cas précédent) par  $v(0)=1$  :

$$v(u) = 1 - \frac{u}{u_2} \quad (3-85)$$

Il faut comme précédemment évaluer les puissances  $P_e$  et  $P_{rm}$  en substituant dans les expressions générales (3-85) la valeur de  $v(u)$ . On obtient ainsi :

$$\frac{P_e}{2\pi w_0 R H P} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3u_2} \right) \quad (3-86)$$

On suppose maintenant  $u_2$  est compris entre 0 et 1. Sous cette hypothèse, on trouve l'expression suivante pour  $P_{rm}$  :

$$\frac{P_{rm}}{2\pi w_0 H N_0} = u_2 + \frac{1}{2u_2} - 1 \quad (3-87)$$

Si  $u_2$  est compris entre  $1/3$  et  $1$ , on a à la fois  $P_e > 0$  et l'expression de  $P_{rm}$  par (3- 87) qui est valide. Dans ce cas, la condition nécessaire de stabilité (3- 65) s'écrit :

$$f^+ \leq 3 \frac{(2u_2^2 - 2u_2 + 1)}{(3u_2 - 1)} = f_1^c(u_2) \quad (3- 88)$$

On note que la majoration de  $f^+$  que nous venons d'obtenir ne fait pas intervenir  $k$  (car le champ de vitesse considéré ne fait pas intervenir la résistance à la flexion). On optimise cette majoration par rapport à  $u_2$ . L'optimum est atteint pour :

$$u_2^* = \frac{2 + \sqrt{10}}{6} \quad (3- 89)$$

On vérifie que  $u_2^* \approx 0,86$  ; la condition de validité de (3- 88) est donc satisfaite. On peut maintenant remplacer dans (3- 88)  $u_2$  par  $u_2^*$  ; on trouve :

$$f^+ \leq f_2^c = f_2^c(u_2^*) = \frac{2(\sqrt{10} - 1)}{3} \approx 1,4415 \quad (3- 90)$$

### 3.2.14.3 Conclusion de l'étude des deux mécanismes

On peut tracer sur le même graphique les deux courbes  $f_1^c(k)$  et  $f_2^c(k)$

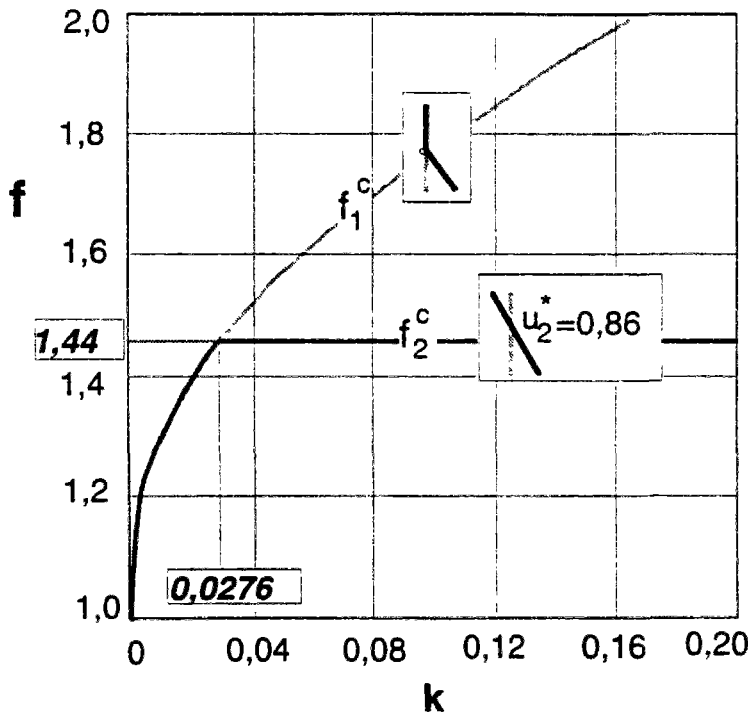


Figure 3-10 Tracé de  $f_1^c(k)$  et de  $f_2^c(k)$

On retiendra pour chaque valeur de  $k$  la majoration suivante, comme condition nécessaire de stabilité :

$$f^+(k) \leq \inf(f_1^c(k), f_2^c) = f^c(k) \quad (3-91)$$

On détermine la valeur  $k_1$  de  $k$  correspondant à  $f_1^c(k) = f_2^c$  :

$$k_1 = \frac{2(f_2^c - 1)^3}{3 f_2^{c^2}} = \frac{5}{18} \frac{46\sqrt{10} - 145}{11 - 2\sqrt{10}} = 0,02761 \quad (3-92)$$

Pour  $k < k_1$ , c'est le mécanisme avec une charnière qui fournit le meilleur majorant ; pour  $k > k_1$ , c'est le mécanisme sans charnière. Qualitativement, ce résultat est naturel. Les petites valeurs de  $k$  correspondent à une faible résistance à la flexion et un mécanisme avec une charnière faisant jouer cette résistance est peu pénalisant.

### 3.2.15 Obtention de solutions exactes

#### 3.2.15.1 Le théorème d'association

La solution exacte d'un problème de calcul à la rupture consiste à déterminer la frontière de l'ensemble des chargements supportables ; dans notre cas, il suffit de déterminer  $f^+$ . On aura déterminé  $f^+$  si les approches cinématique et statique combinées ont permis d'obtenir un encadrement :  $f^s \leq f^+ \leq f^c$ , avec  $f^s = f^c$ . Dans ce cas, le champ statique et le champ cinématique sont dits associés.

Le théorème d'association (Salençon, 1983) donne des informations complémentaires sur ces champs : en tout point  $\underline{x}$  où le taux de déformation n'est pas nul, la contrainte est sur la frontière du domaine de résistance  $G(\underline{x})$ , et le taux de déformation est normale extérieure à  $G(\underline{x})$  supposé étoilé (Figure 3-11). Dans le cas d'une discontinuité du champ cinématique, on a la propriété homologue.

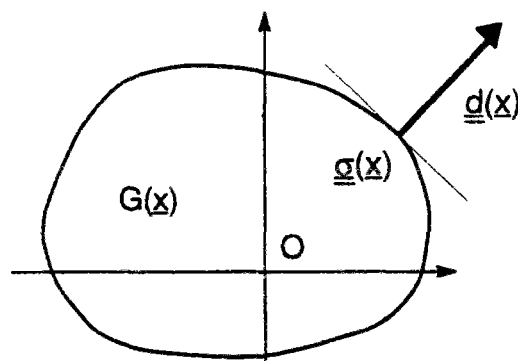


Figure 3-11 Domaine de résistance et taux de déformation normale extérieure à la frontière

### 3.2.15.2 Condition d'association d'une statique à une cinématique donnée

Supposons donc maintenant qu'une approche cinématique ait permis de déterminer une borne supérieure  $f^c$ . Cette borne est la solution exacte s'il existe un champ statique associé vérifiant le critère et équilibrant le chargement  $f^c$ . Un tel champ statique est associé au champ cinématique et doit donc vérifier les propriétés données par le théorème d'association. Ceci va nous servir de guide pour construire ce champ statique associé en supposant son existence. Nous nous plaçons toujours dans le cas de notre critère portant sur  $(n, m)$  sans interaction (Figure 3-12).

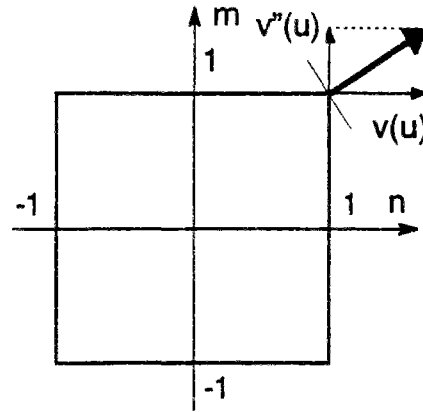


Figure 3-12 Domaine de résistance en  $(n, m)$

On déduit du théorème d'association les conditions nécessaires suivantes pour que le champ de contraintes généralisées  $(n, m)$  soit associé à un champ de déformation défini par  $v(u)$  :

$$\text{si } v > 0, \quad n = 1 ; \quad \text{si } v < 0, \quad n = -1 \quad (3-93)$$

$$\text{si } v'' > 0, \quad m = 1 ; \quad \text{si } v'' < 0, \quad m = -1 \quad (3-94)$$

$$\text{si } \llbracket v' \rrbracket > 0, \quad m = 1 ; \quad \text{si } \llbracket v' \rrbracket < 0, \quad m = -1 \quad (3-95)$$

Ces propriétés vont servir de guide pour construire la solution statique associée à une cinématique quand cette solution associée existe.

En particulier, on voit que si  $v \neq 0$  partout ou sauf en un nombre fini de points, alors  $n$  est déterminée partout (ou sauf en un nombre fini de points). Compte tenu de l'équation différentielle d'équilibre (3-31) à satisfaire par  $m$ , on en déduit que  $m$  est entièrement déterminée si les conditions aux limites sont suffisantes. Il en sera toujours ainsi pour notre problème puisque le bord supérieur est libre, assurant ainsi deux conditions aux limites sur  $m$  et  $m'$ . Nous voyons donc que pour notre problème, nous disposons d'un résultat d'unicité. Ce résultat est un cas particulier du théorème d'unicité énoncé notamment pour un milieu 3D avec un critère strictement convexe (Salençon, 1983) : le champ statique équilibrant un chargement extrême est unique en tous les points où un champ

cinématique donnant la majoration exacte pour le chargement extrême a une déformation non nulle.

### 3.2.15.3 Condition d'association d'une cinématique à une statique donnée

Si une approche statique a permis de construire un champ de contraintes équilibrant le chargement  $f^s$ , et si on trouve un champ cinématiquement admissible tel que, en tout point, la densité de puissance de déformation du champ de contraintes précédent est égale à la densité de puissance résistante maximale, alors on a  $f^s = f^+$ .

Dans le cas particulier de notre critère en  $(n, m)$  sans interaction, on déduit les conditions nécessaires suivantes sur le champ cinématique éventuellement associé à un champ statique donné :

$$\text{si } n = 1, v \geq 0; \text{ si } 1 > n > -1, v = 0; \text{ si } n = -1, v \leq 0 \quad (3-96)$$

$$\begin{aligned} \text{si } m = 1, v'' \geq 0 \text{ ou } \llbracket v' \rrbracket \geq 0; \text{ si } 1 > m > -1, v'' = 0 \text{ ou } \llbracket v' \rrbracket = 0; \\ \text{si } m = -1, v'' \leq 0 \text{ ou } \llbracket v' \rrbracket \leq 0 \end{aligned} \quad (3-97)$$

Dans (3-97), l'information porte sur  $v''$  ou sur  $\llbracket v' \rrbracket$  selon que  $v'$  est dérivable (donc continue) ou pas. Rappelons qu'il n'y a pas en général unicité (à un facteur multiplicatif positif près) du champ cinématique associé à un champ statique supportant un chargement extrême. Notre étude en fournira des contre-exemples.

Dans notre cas particulier, considérons un champ statique équilibrant un chargement  $f^s$ . Supposons que nous ayons pu construire une cinématique linéaire par morceaux, satisfaisant les conditions (3-96) sur la valeur de  $v$  et les conditions (3-97) sur la valeur de  $\llbracket v' \rrbracket$  aux points de raccordements des morceaux linéaires. (On remarque que pour un champ linéaire par morceaux les conditions (3-97) portant sur  $v''$  sont toujours vérifiées). Alors, cette cinématique est associée au champ statique et le chargement  $f^s$  est un chargement extrême. En effet, on vérifie alors facilement que la densité de puissance de déformation du champ statique pour cette cinématique est partout égale à la densité de puissance résistante maximale.

### 3.2.16 Étude statique dans le cas du cylindre à bord libre

Nous allons appliquer la démarche présentée au 3.2.15.2. Notre démarche va donc consister à chercher dans le cas  $k \leq k_1$ , une solution statique associée au mécanisme optimal de la classe de mécanismes avec charnière et dans le cas  $k \geq k_1$ , une solution statique associée au mécanisme optimal de la classe des mécanismes sans charnière.

### 3.2.16.1 Étude dans le cas où $k \geq k_1$

On va s'assurer que dans ce cas, on a  $f^+ = f_2^c$ . En fait, s'il existe une solution statique associée, celle-ci est entièrement déterminée (cf. 3.2.15.2). En effet,  $n(u)$  est déterminée partout sauf au point  $u = u_2^*$  : pour  $u < u_2^*$ , on a  $n=1$  et pour  $u > u_2^*$  on a  $n=-1$ .

On considère donc l'équation différentielle d'équilibre (3-31), dans laquelle on prend  $f = f_2^c(k)$ . La solution de l'équation différentielle en  $m$  est entièrement déterminée pour  $u < u_2^*$  par les conditions  $m=0$  et  $m'=0$  en  $u=0$  et pour  $u > u_2^*$  par les conditions  $m=0$  et  $m'=0$  en  $u=1$ . On en déduit que si une solution  $m$  existe, elle est nécessairement la suivante :

$$\begin{cases} m = \frac{1}{k} \left( (f_2^c - 1) \frac{u^2}{2} - f_2^c \frac{u^3}{6} \right) & \text{pour } u < u_2^* \\ m = \frac{1}{k} \left( (f_2^c + 1) \frac{u^2}{2} - f_2^c \frac{u^3}{6} - \frac{f_2^c + 2}{2} u + \frac{f_2^c + 3}{6} \right) & \text{pour } u > u_2^* \end{cases} \quad (3-98)$$

Il reste deux conditions à vérifier : il faut respecter le critère en  $m$  soit  $|m| \leq 1$  et il faut que  $m$  et  $m'$  soient continues en  $u = u_2^*$ . En fait, la condition de continuité est vérifiée pour la valeur particulière de  $f_2^c$  trouvée dans l'étude cinématique :

$$f_2^c = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10} \approx 1,4415$$

On vérifie également que la condition  $|m| \leq 1$  est vérifiée pour  $k \geq k_1 = 0,02761$ .

On peut finalement conclure que  $f^+ = f_2^c \approx 1,4415$  est la solution exacte pour  $k \geq k_1 \approx 0,02761$ .

### 3.2.16.2 Étude dans le cas où $k \leq k_1$

#### 3.2.16.2.1 Solution statique dans la zone où $u < u_1^*$

Dans cette zone, la solution statique éventuellement associée à la cinématique optimale de la classe des cinématiques avec une charnière est entièrement déterminée. On a immédiatement :

$$n=1 \quad (3-99)$$

La valeur de  $m(u)$  sur ce segment  $[0, u_1^*]$  s'obtient en résolvant l'équation différentielle vérifiée par  $m$  avec les conditions aux limites au bord inférieur libre. Dans cette équation différentielle, on prend  $f = f_1^c(k)$ .

On désigne par  $m_b(u)$  la solution de cette équation :

$$m = m_b = \frac{1}{k}((f_1^c - 1)\frac{u^2}{2} - f_1^c \frac{u^3}{6}) \quad (3-100)$$

Pour que cela puisse définir une solution statique, il faut vérifier que le critère de résistance portant sur  $m$  est vérifié. On calcule la dérivée  $m'_b(u)$ . Cette dérivée est nulle pour  $u=0$  et pour  $u = 2\frac{(f_1^c - 1)}{f_1^c} = u_1^*$ . On calcule  $m_b(u_1^*)$  et on

trouve :  $m_b(u_1^*) = \frac{1}{k} \frac{2(f_1^c - 1)^3}{3(f_1^c)^2}$ . La condition  $m(u_1^*) \leq 1$  est satisfaite puisque

$k = \frac{2(f_1^c - 1)^3}{3(f_1^c)^2}$ . En fait, on peut vérifier que la condition  $|m(u)| \leq 1$  est vérifiée pour  $0 \leq u \leq u_1^*$ .

Mais cette solution  $m_b$  doit être prolongée entre  $u_1^*$  et 1. En particulier,  $m_b$  ne peut pas satisfaire en  $u=1$  la condition  $m'=0$ . On note également que l'unicité n'est plus assurée entre  $u_1^*$  et 1. Nous allons étudier deux prolongements différents : par une sinusoïde et par un polynôme du troisième degré. Ces deux types de prolongements auront chacun leur domaine de validité en terme de valeur du paramètre  $k$ .

### 3.2.16.2.2 Prolongement par une sinusoïde

On définit le prolongement  $m_s$  ci-dessous par :

$$m_s(u) = \frac{1}{2}(\cos(\pi \frac{u - u_1^*}{1 - u_1^*}) + 1) \quad (3-101)$$

Cette fonction  $m_s$  vérifie  $|m_s| \leq 1$ , elle vérifie les conditions de continuité de  $m$  et de  $m'$  au point de raccordement  $u_r = u_1^*$ , ainsi que les conditions  $m=0$  et  $m'=0$  au bord supérieur ( $u=1$ ). Il reste à vérifier la possibilité de trouver  $n(u)$  satisfaisant l'équation différentielle de l'équilibre et le critère de résistance  $|n| \leq 1$ . Ces deux conditions sont équivalentes aux deux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} 1 \geq f(1-u) + \frac{k}{2} \frac{\pi^2}{(1-u_1^*)^2} \cos(\pi \frac{u - u_1^*}{1 - u_1^*}) \\ f(1-u) + \frac{k}{2} \frac{\pi^2}{(1-u_1^*)^2} \cos(\pi \frac{u - u_1^*}{1 - u_1^*}) \geq -1 \end{cases} \text{ pour } u \in [u_1^*, 1] \quad (3-102)$$

On trouve une condition suffisante pour que la première des deux inéquations ci-dessus soit satisfaite :  $1 \geq f(1-u) + \frac{k}{2} \frac{\pi^2}{(1-u_1^*)^2}$ . Cette condition est elle-

même équivalente à :  $k \leq \frac{2(f-1)(2-f)^2}{\pi^2 f^2}$ . Compte tenu de la relation  $k = \frac{2(f-1)^3}{3 f^2}$ ,

on trouve comme condition suffisante :  $f \leq \frac{1+\pi/\sqrt{3}}{2-\pi/\sqrt{3}} \approx 1,3554$ .

On peut vérifier que cette condition est également suffisante pour que la deuxième inégalité soit vérifiée. La figure ci-après montre la répartition de l'effort normal et du moment pour une valeur particulière de k.

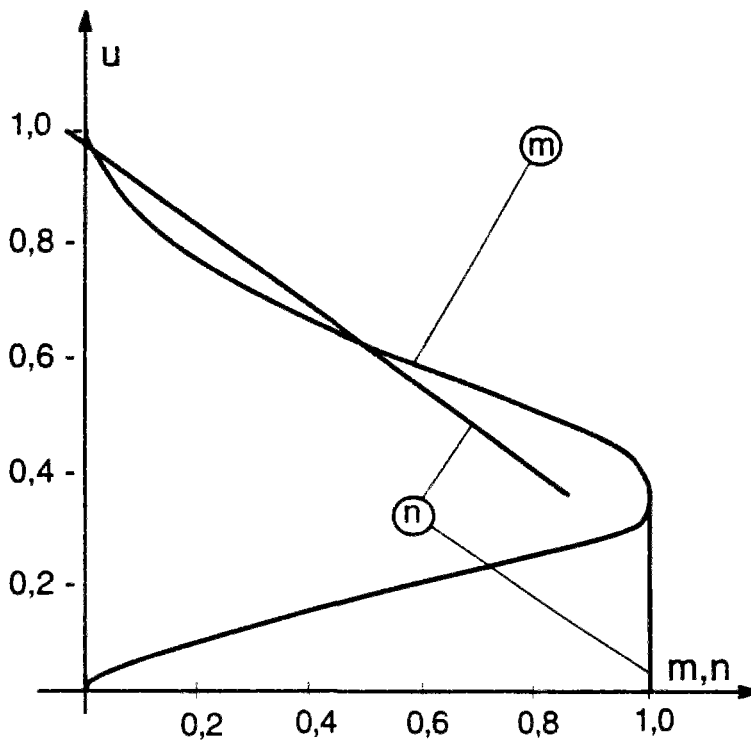


Figure 3-13 Répartition de m et de n  
avec le prolongement sinusoïdal pour f=1.2

Comme on a pu construire une statique sur tout le cylindre satisfaisant aux conditions d'équilibre et au critère de résistance, on peut maintenant affirmer que la solution trouvée à l'issue de l'étude cinématique est exacte pour f compris entre 1 et 1,3554 soit k compris entre 0 et 0,01629.

### 3.2.16.2.3 Prolongement par un polynôme

On va chercher un prolongement  $m_p$  solution de l'équation différentielle d'équilibre avec  $n=a$ , a étant une constante comprise entre -1 et 1. Ce choix assure que la condition de résistance portant sur la valeur de l'effort normal sera



automatiquement satisfaite. On intègre cette équation avec les conditions à la limite en  $u=1$ . On obtient :

$$m_p = \frac{1}{k} \left( \frac{f_1^c}{6} (1-u)^3 - \frac{a}{2} (1-u)^2 \right) \quad (3-103)$$

Pour déterminer le paramètre  $a$ , on va écrire les conditions de raccordement entre  $m_p$  et  $m_b$ . Il faut qu'il existe un point  $u_r$  tel que  $m_p(u_r)=m_b(u_r)$  et  $m'_p(u_r)=m'_b(u_r)$  ; une condition est que le résultant<sup>1</sup> des polynômes  $(m_p-m_b)$  et  $(m'_p-m'_b)$  soit nul. Cette condition détermine le paramètre  $a$  ; on trouve :

$$a = f \left( \frac{3f-4}{8f-12} \right) \quad (3-104)$$

On peut ensuite déterminer  $u_r$  en reportant la valeur de  $a$  dans l'équation  $m'_p=m'_b$  ; on trouve :

$$u_r = \frac{f}{3(2-f)} \quad (3-105)$$

La condition nécessaire  $a \geq -1$  donne  $f \leq -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10} \approx 1,4415$  soit  $k \leq 0,02761$ . La condition nécessaire  $m_p \geq -1$  donne  $f \geq 6/5 = 1,2$  soit  $k \geq 0,00370$ . On vérifie également que la condition  $u_r \geq u_1^*$  est satisfaite pour les valeurs de  $f$  qui nous intéressent. Le tracé des courbes  $m(u)$  et  $n(u)$  (Figure 3-14) permet de vérifier visuellement la condition  $|m| \leq 1$ .

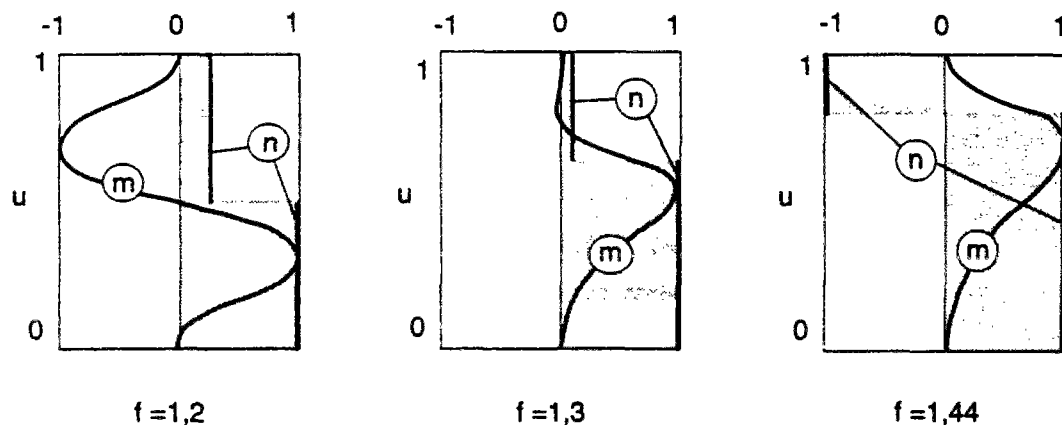


Figure 3-14 Tracé de  $m(u)$  et de  $n(u)$  avec le prolongement par un polynôme pour  $f=1,2, 1,3, 1,4415$

<sup>1</sup> Nous sommes ainsi amené à utiliser un outil classique de l'algèbre. On peut, par exemple, se reporter à Lelong-Ferrand et Arnaudès (1978). La nullité du résultant est une condition nécessaire et suffisante pour que deux polynômes d'une seule variable aient une racine commune. Ce résultant peut être calculé comme le déterminant de la matrice de Sylvester obtenue à partir des coefficients des deux polynômes. Ces calculs, qui peuvent vite être lourds, ont été considérablement allégés par l'emploi d'un logiciel de calcul formel.

On peut aussi constater la différence entre le prolongement par une sinusoïde (Figure 3-13) et le prolongement par un polynôme (Figure 3-14) en particulier dans le cas où  $f=1,2$  pour lequel les deux cas de prolongement ont été représentés.

Nous pouvons donc conclure de l'étude de ce prolongement de  $m(u)$  par un polynôme, que la solution trouvée à l'issue de l'étude cinématique est exacte pour  $f$  compris entre 1,2 et 1,4415 soit  $k$  compris entre 0,003704 et 0,02761.

#### 3.2.16.2.4 Conclusion de l'étude statique pour le cylindre à bord libre

Récapitulons les résultats obtenus grâce à l'étude statique.

Type de solution statique	Domaine de validité exprimé en fonction de $k$	Variation de $f^*$ dans le domaine de validité
prolongement par une sinusoïde (3.2.16.2.2)	$0 \leq k \leq 0,01629$	$1 \leq f^* \leq 1,3554$
prolongement par un polynôme (3.2.16.2.3)	$0,003704 \leq k \leq 0,02761$	$1,2 \leq f^* \leq 1,4415$
solution polynomiale (3.2.16.1)	$k \geq 0,02761$	$f^* = 1,4415$

Tableau 3-3 Domaine de validité des différentes solutions statiques pour le cylindre à bord libre

On conclut finalement de l'examen du tableau ci-dessus que la solution cinématique donne la solution exacte pour toutes les valeurs de  $k$ .

### 3.2.17 Cylindre à bord appuyé ou encastré

Nous allons, cette fois, utiliser d'abord la méthode statique par l'intérieur, puis nous exhiberons une cinématique associée. Cette démarche pourra sembler un peu moins naturelle, mais elle permet de mener le plus directement les calculs. En particulier, l'étude cinématique est extrêmement allégée.

Nous serons amenés à distinguer trois cas selon la valeur de  $k$  : coque longue (qui correspond aux petites valeurs du paramètre  $k$ ), coque moyenne, coque courte.

L'exposé détaillé est reporté en annexe B.

### 3.2.18 Conclusion de l'étude du problème auxiliaire

Pour chaque condition à la limite sur le bord inférieur, on a trouvé le chargement extrême supportable pour différents domaines de variation du

paramètre  $k$ . A chaque fois, ces domaines se raccordent exactement et la solution trouvée est continue quand on passe d'un domaine à l'autre (par exemple des coques longues aux coques moyennes).

Le nombre et la nature des cercles d'articulation différencient les différentes cinématiques les unes des autres, comme l'illustre le tableau récapitulatif suivant.









	coque longue	coque moyenne	coque courte
bord inférieur libre	 1		 0
bord inférieur appuyé	 2	 1	 0
bord inférieur encastré	 3	 2	 1

Figure 3-15 Schémas des cinématiques et nombre de cercles d'articulation (rond plein = charnière « plastique », rond creux = charnière mécanique)

La figure ci-après résume le résultat principal qui est le chargement extrême  $f^+$  en fonction de  $k$ .

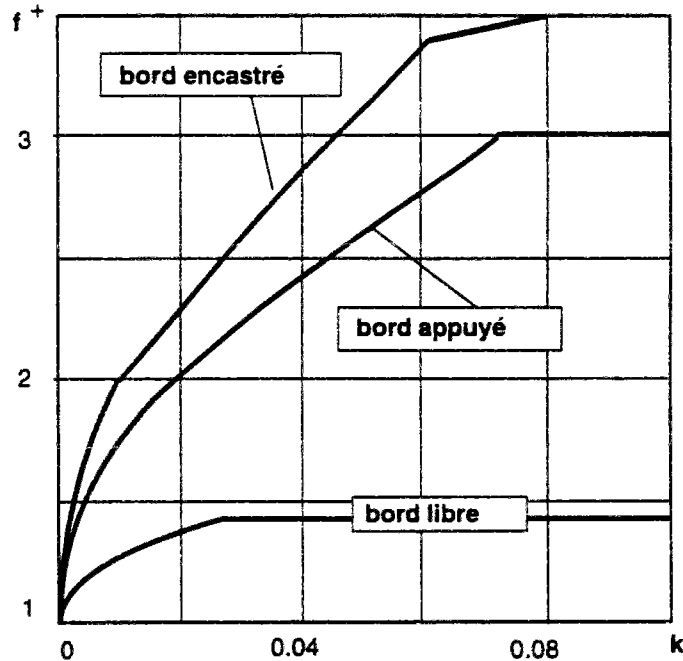


Figure 3-16 Paramètre de chargement extrême  $f^+$  en fonction de  $k$

Les résultats obtenus<sup>1</sup> amènent à modifier sur quelques points les travaux antérieurs (Olszak et Sawczuk,1959),(Save et Massonnet, 1972) :

- la limite de validité du résultat pour la coque courte à bord encastré est  $1/k=16,9$  alors que Olszak et Sawczuk donnaient 18 et Save et Massonnet donnent une valeur déjà modifiée : 17,1.

- la limite de validité du résultat  $f^+=3$  pour la coque courte à bord appuyé est déterminée par  $1/k=13,5$  alors que les auteurs déjà cités prolongent la droite jusqu'à  $1/k=18$ .

- la valeur de  $f^+$  pour la coque courte à bord libre est 1,4415, alors que les auteurs précédents donnent un schéma où l'on peut lire la valeur 2.

Pour terminer, comparons les solutions obtenues pour les coques longues dans les différents cas de conditions à la limite et donnons des équivalents dans l'hypothèse où le paramètre  $k$  est petit. C'est ce cas qui va nous intéresser pour l'application aux gabions.

	bord libre	bord appuyé	bord encastré
$k(f)$	$\frac{2(f-1)^3}{3 f^2}$	$\frac{\sqrt{3}(f-1)^3}{27 f^2}$	$\frac{1(f-1)^3}{24 f^2}$
équivalent de $f(k)$ pour $k$ petit	$1 + \sqrt[3]{\frac{3}{2}k}$ $\approx 1 + 1,145\sqrt[3]{k}$	$1 + \sqrt[3]{\frac{27}{\sqrt{3}}k}$ $\approx 1 + 2,498\sqrt[3]{k}$	$1 + \sqrt[3]{24k}$ $\approx 1 + 2,884\sqrt[3]{k}$
lieu des rotules plastiques $u_1$ et $u_2$	$u_1(k) \approx 2 \frac{f-1}{f}$	$u_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \frac{f-1}{f};$ $u_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \frac{f-1}{f}$	$u_1 = \frac{f-1}{2f};$ $u_2 = \frac{3f-1}{2 f}$
équivalent de $u_1(k)$ et $u_2(k)$ pour $k$ petit	$u_1(k) \approx 2,289\sqrt[3]{k}$	$u_1(k) \approx 1,056\sqrt[3]{k}$ $u_2(k) \approx 3,940\sqrt[3]{k}$	$u_1(k) \approx 1,442\sqrt[3]{k}$ $u_2(k) \approx 4,327\sqrt[3]{k}$

Tableau 3-4 Comparaison des solutions pour les différents cas de coques longues ( $k$  petit)

Si on remplace la condition « bord supérieur libre » par bord supérieur simplement appuyé ou encastré, le chargement maximal ne peut qu'augmenter puisque les solutions statiques que nous avons construites conviennent aussi pour ces autres types de condition au bord supérieur.

<sup>1</sup> On peut comparer ces résultats à ceux donnés sous forme graphique par Cinquini et al. Pour  $k=0,08$ , ces auteurs trouvent dans le cas encastré à la base  $\approx 3,0$  (au lieu de 3,48), dans le cas simplement appuyé à la base  $\approx 2,4$  (au lieu de 3), dans le cas libre à la base  $\approx 1,3$  (au lieu de 1,44). Il était attendu que nos résultats soient plus grands que ceux de Cinquini et al. puisque leur critère de résistance est contenu dans celui que nous avons utilisé.

On se place maintenant dans le cas des coques longues : le paramètre  $k$  satisfait l'inégalité que nous avons trouvée dans le cas du bord supérieur libre en tenant compte de la condition au bord inférieur. Les solutions cinématiques que nous avons construites pour les coques longues sont telles que le bord supérieur de la coque est immobile. Ces cinématiques peuvent donc être utilisées aussi pour les autres cas de conditions aux limites sur le bord supérieur. Alors, nous pouvons conclure que la solution exacte que nous avons trouvée pour le cas du bord supérieur libre est aussi la solution exacte pour le bord supérieur appuyé ou encastré.

### 3.3 Application à la cellule de gabion isolé

#### 3.3.1 Utilisation des résultats du problème auxiliaire

Il s'agit d'appliquer les résultats obtenus à l'étude statique de la cellule de gabion isolée. Rappelons le résultat obtenu (Dormieux et Delaurens, 1991) en négligeant la résistance à la flexion de la palplanche :

$$\frac{\gamma^+ RH}{N_0} = \left( \frac{\gamma RH}{N_0} \right)^+ \geq K_P = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (3-14)$$

L'étude menée en 3.2 permet d'améliorer ce résultat en considérant des champs de contraintes dans la coque faisant intervenir la résistance à la flexion. On a montré qu'il est possible de trouver un champ de contraintes généralisées dans la coque si la condition suivante est satisfaite :

$$P \leq \frac{N_0}{R} f^+ \quad (3-106)$$

où  $f^+$  est le résultat de l'étude du problème auxiliaire et dépend de  $k$  et de la condition à la limite au bord inférieur.  $P$  désigne la valeur maximale atteinte au bord inférieure d'une répartition linéaire de pression.

Si on considère le champ de Rankine suivant dans le remblai :

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = \gamma(z - H) \\ \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = K_a \sigma_{zz} \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = 0 \end{cases} \quad (3-107)$$

Ce champ est statiquement admissible dans le remblai comme on l'a vu précédemment. Le choix de  $K_a$  correspond à la valeur minimale de la pression exercée sur la coque pour un champ de Rankine compatible avec les équations d'équilibre et avec le critère de résistance de Coulomb du remblai. On voit que les efforts exercés par le remblai sur la coque se réduisent à une distribution de pression linéaire entièrement caractérisée par sa valeur maximale atteinte au bord inférieur :

$$P = K_a \gamma H \quad (3-108)$$

On déduit finalement qu'il existe une solution statique satisfaisant les conditions d'équilibre et les critères de résistance **dans le remblai et dans la coque** si la condition suivante est satisfaite :

$$K_a \gamma H \leq \frac{N_0}{R} f^+ \quad (3-109)$$

On déduit l'inégalité suivante pour le chargement maximal potentiellement supportable pour la cellule de gabion isolée :

$$\frac{\gamma^+ N_0}{RH} \geq K_p f^+ \quad (3-110)$$

Par rapport au résultat obtenu en ne tenant pas compte de la résistance à la flexion, on voit que la borne inférieure statique est multipliée par le facteur  $f^+$ . Le coefficient  $f^+$  a été déterminé précédemment ; il dépend de la condition aux limites au bord inférieur (bord libre, appuyé ou encastré) et de  $k = \frac{RM_0}{H^2 N_0}$ . Il est toujours plus grand que 1, ce qui assure que l'on a amélioré les résultats antérieurs.

## 3.3.2 Exemples numériques

Prenons un exemple numérique pour évaluer l'ordre de grandeur de cette amélioration. On suppose les valeurs suivantes pour les différents paramètres du problème :

$$\begin{cases} R = 7,50\text{m} & H = 20\text{m} \\ N_0 = 3\text{MN/m} & M_0 = 9\text{kN.m/m} \end{cases}$$

Ces valeurs correspondent à des palplanches d'épaisseur 12 mm réalisées dans un acier ayant une résistance à la traction  $\sigma_0$  égale à 250 MPa ; on a supposé  $M_0 = \frac{\sigma_0 e^2}{4}$ . On déduit de ces données la valeur de  $k$  ; on trouve  $k = 5,625 \cdot 10^{-5}$ . Quelle que soit la condition à la limite au bord inférieur, nous sommes dans le cas des coques longues.

On trouve :

$$\begin{aligned} f^+ &= 1,045 \text{ pour le bord libre,} \\ f^+ &= 1,102 \text{ pour le bord appuyé,} \\ f^+ &= 1,119 \text{ pour le bord encastré.} \end{aligned}$$

Prenons un autre exemple numérique (Corfdir, 1996-b). La principale différence est la prise en compte de la surépaisseur due aux serrures qui joue un rôle très important dans la résistance à la flexion de la palplanche.

$$\begin{cases} R = 8\text{m} & H = 15\text{m} \\ N_0 = 5\text{MN/m} & M_0 = 85\text{kN.m/m} \end{cases}$$

On trouve :

$f^+ = 1,103$  pour le bord libre,

$f^+ = 1,244$  pour le bord appuyé,

$f^+ = 1,289$  pour le bord encastré.

### 3.3.3 Conclusions

La borne inférieure que nous avons obtenue constitue donc une amélioration par rapport aux travaux antérieurs déjà cités. Elle pourrait être améliorée en tenant compte du frottement à l'interface remblai/substratum et éventuellement à l'interface remblai/palplanches. Ceci nécessiterait la construction de champs de contraintes plus complexes dans le remblai. L'utilisation pour le remblai de méthodes numériques de type « éléments finis » (Pastor, 1983) devrait permettre également d'améliorer ces résultats obtenus uniquement par des calculs analytiques et faciliterait beaucoup la prise en compte des frottements aux interfaces.

On a pu mettre en évidence l'influence de la résistance à la flexion des palplanches plates sur la borne inférieure du chargement maximal.





## 4. Étude cinématique du gabion isolé sous poids propre

*Nous abordons maintenant l'étude cinématique de la cellule de gabion isolée sous poids propre. Après un rappel des travaux antérieurs (§4.1) et un préambule sur la construction de champs cinématiques symétrisés (§4.2), nous entamons la construction effective de champs cinématiques.*

*Nous commençons par des cinématiques adaptées au cas où il n'y a pas de frottement entre le remblai et le substratum (§4.3). Pour cela, nous construisons deux types de cinématiques par des procédés différents : par symétrisation d'un mécanisme par blocs et directement comme solution d'une équation aux dérivées partielles.*

*Nous étudierons ensuite le cas principal : celui de l'interface remblai/substratum frottante (§4.4). Nous construisons un champ cinématique axisymétrique à partir d'un champ par blocs. La prise en compte de la rigidité à la flexion des palplanches oblige à modifier quelque peu cette cinématique en ce qui concerne la coque. Un cas de solution exacte sera donné en annexe C.*

*Nous étudierons ensuite les effets hydrauliques (§4.5) et nous terminerons par une cinématique permettant d'étudier la résistance d'une cellule de gabion soumise à un moment de renversement en plus de son poids propre (§4.6).*

### 4.1 Rappel des travaux antérieurs

Les travaux antérieurs que l'on peut noter sont : (Lochmann, 1988), (Dormieux et Delaurens, 1991), (Buhan, Dormieux et Maghous, 1992). Ces travaux ont pris en compte diverses combinaisons de critères pour le remblai, pour les interfaces, pour la prise en compte éventuelle de l'effet de l'eau. Différents types de cinématique ont été en conséquence étudiés suivant les hypothèses retenues. Le tableau suivant résume ces diverses considérations :

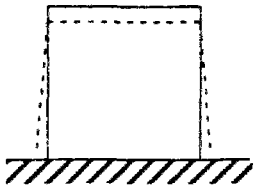
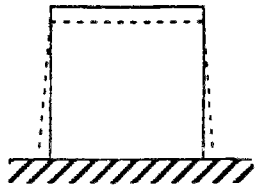
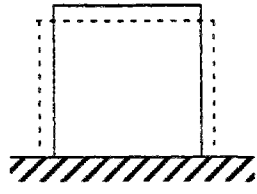
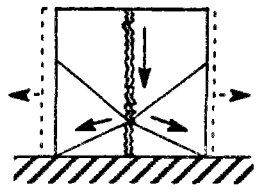
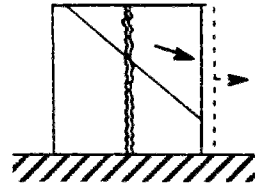
	Lochmann (1998)	Dormieux et Delaurens (1991)	Buhan, Dormieux et Maghous (1992)
critère pour le remblai	critère de Tresca et critère de Mises	critère de Coulomb sans cohésion et critère de Tresca	critère de Coulomb sans cohésion
critère pour les palplanches	$N_{\theta\theta} \leq N_0$ $ N_{z\theta}  \leq T_0$ $ M_{zz}  \leq M_0$	$N_{\theta\theta} \leq N_0$ $ N_{z\theta}  \leq T_0$	$N_{\theta\theta} \leq N_0$ $ N_{z\theta}  \leq f N_0$
interface remblai/substratum	$ \tau  \leq \tau_{rs}$	lisse	$ \tau  + \sigma_n \operatorname{tg}(\delta_{rs}) \leq 0$
interface remblai/palplanches	$ \tau  \leq \tau_{rp}$	lisse	lisse
interface palplanches/substratum	$ \tau  \leq \tau_{ps}$	lisse	lisse
prise en compte de l'eau	non	non	prise en compte d'une différence de hauteur d'eau sans écoulement
type de champ cinématique étudié	champ de déformation  d'autres mécanismes ont été envisagés dans le cas du gabion fiché dans le sol de fondation	champ de déformation  	champ par blocs  

Tableau 4-1 Études antérieures sur la cinématique du gabion isolé

## 4.2 Construction de champs symétrisés

On considère un problème de calcul à la rupture axisymétrique. L'axisymétrie doit concerner la géométrie, les critères de résistance, les conditions cinématiques et les forces extérieures appliquées (constituant le chargement). On considère un champ cinématique  $\underline{U}(r, \theta, z)$ .

On introduit alors le champ symétrisé  $\underline{U}_{\infty}$  défini par ses composantes  $U_{\infty i}$  :

$$U_{\infty i}(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_i(r, \omega, z) d\omega \quad i \in \{r, \theta, z\} \quad (4-1)$$

Un tel champ vérifiera les conditions cinématiques axisymétriques si le champ de départ les satisfait. Il faut vérifier que ce champ cinématique donnera une borne des chargements extrêmes aussi bonne ou meilleure que le champ cinématique  $\underline{U}$ .

Il est clair que la puissance des efforts extérieurs  $P_e$  est la même pour  $\underline{U}$  et pour  $\underline{U}_\infty$  à cause de la symétrie axiale de ces forces extérieures (dont les composantes en coordonnées cylindriques ne dépendent pas de  $\theta$ ) et de la linéarité de la fonctionnelle  $P_e$ .

La puissance résistante maximale du champ  $\underline{U}_\infty$  est, elle, inférieure ou égale à la puissance résistante maximale du champ  $\underline{U}$ . Sous certaines conditions de caractère mathématique, cela résulte de la convexité du critère de résistance. Une manière de s'en convaincre est de considérer  $\underline{U}_\infty$  comme la limite d'une suite de cinématiques  $\underline{U}_n$ . Cette suite est définie de la manière suivante :

$$\underline{U}_{n_i}(r, \theta, z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underline{U}_i(r, \theta + 2k\pi/n, z) \quad (4-2)$$

Extrayons une sous-suite avec les termes d'ordre  $n=2^p$ , nous obtenons une suite de cinématiques dont la valeur de la puissance résistante maximale est décroissante à cause de la convexité de la puissance résistante maximale. Enfin, on a :

$$P_{rm}(\lim_{p \rightarrow \infty} \underline{U}_{2^p}) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} (P_{rm}(\underline{U}_{2^p})) \quad (4-3)$$

Ceci est simplement la traduction de la semi-continuité inférieure de la puissance résistante maximale. Une démonstration de cette propriété ainsi que le détail des hypothèses nécessaires (définition de la topologie, hypothèse sur le critère) peuvent être trouvés dans (Temam, 1983). Notons que les hypothèses<sup>1</sup> à respecter par les champs de vitesse  $\underline{U}$  ne sont pas restrictives en pratique ; on peut prendre en particulier des champs présentant des discontinuités à travers une surface.

Comme la puissance des efforts extérieurs est identique et la puissance résistante maximale est diminuée (ou inchangée) quand on passe de la cinématique  $\underline{U}$  à la cinématique symétrisée correspondante, on en déduit que la condition nécessaire de stabilité donnée par la cinématique est toujours au moins aussi contraignante. On peut donc se limiter à l'étude de cinématiques axisymétriques. En fait, l'inégalité (4-3) peut être stricte (Corfdir, 1996-a), ce qui renforce l'intérêt de se servir de champs axisymétriques.

Ces considérations sont transposables au cas de problèmes présentant des symétries plus simples (groupe de symétrie fini ne nécessitant pas de passage à la limite).

---

<sup>1</sup> Dans la référence citée, on suppose que le champ  $\underline{U}$  appartient à BD.

### 4.3 Cinématiques en l'absence de frottement à la base

On suppose que l'interface substratum/remblai est lisse. On ne tient pas compte de la résistance à la flexion des palplanches et on suppose de plus que le bord inférieur des palplanches est libre et que l'interface remblai/palplanche est lisse. Nous utiliserons deux méthodes différentes de construction de cinématiques axisymétriques : résolution d'une équation aux dérivées partielles ou symétrisation d'une cinématique.

#### 4.3.1 Cinématique solution particulière d'une équation aux dérivées partielles

On se propose de rechercher un champ cinématique comme dérivant d'un « potentiel »  $\psi$  et tel que le critère soit partout saturé, ce qui fournit l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\text{tr}(\underline{d}) = (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \varphi \quad (4-4)$$

On suppose donc que l'on a les conditions suivantes :

$$\begin{cases} U_r = \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ U_\theta = 0 \\ U_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \end{cases} \quad (4-5)$$

Le tenseur de déformation s'écrit alors :

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (4-6)$$

Nous allons maintenant faire des hypothèses supplémentaires sur les signes des différents coefficients du tenseur de déformation. On suppose que l'on a :

$$U_r \geq 0; \quad \frac{\partial U_r}{\partial r} \geq 0; \quad \frac{\partial U_z}{\partial z} \leq 0 \quad (4-7)$$

La condition de pertinence pour le critère de Coulomb, écrit avec la fonction  $\psi$  est alors :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \geq K_p \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (4-8)$$

On cherche donc à résoudre l'équation où l'inégalité ci-dessus est une égalité.

On utilise la méthode de séparation des variables ; on cherche donc des solutions particulières sous la forme :

$$\psi(r, z) = f(r)g(z) \quad (4-9)$$

On trouve les équations suivantes :

$$\frac{f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)}{f(r)} = K_p \frac{g''(z)}{g(z)} = \varepsilon c^2 \quad \text{avec } c = \text{Constante} \quad (4-10)$$

A priori, les deux signes sont envisageables ( $\varepsilon = \pm 1$ ). Mais nous n'allons retenir qu'une seule possibilité. Dans le cas  $\varepsilon = 1$ , nous serions amenés à prendre  $g = \cosh(cz)$  ; il en découle un profil de vitesse radiale éloigné des profils donnant de bonnes solutions dans le cas libre à la base (où la vitesse radiale est plus rapide à la base qu'au sommet). Dans la suite nous nous plaçons dans le cas  $\varepsilon = -1$ . La solution s'écrit alors pour  $g$ , compte tenu de la condition à la limite  $U_z = 0$  en  $z = 0$  :

$$g(z) = \cos\left(\frac{c}{\sqrt{K_p}} z\right) \quad (4-11)$$

Alors, on a :

$$f(r) = -J_0(cr) \quad (4-12)$$

$J_0$  désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 qui est bornée en 0.

Il faut maintenant examiner à quelles conditions les inégalités (4-7) sont satisfaites. Il faut clairement que  $g$  garde tout le temps le même signe sur  $[0, H]$  :

$$\frac{cH}{\sqrt{K_p}} \leq \frac{\pi}{2} \quad (4-13)$$

Mais il faut aussi que les fonctions  $f$ ,  $f'$  et  $f''$  restent positives. La fonction  $J_0(x)$  est positive pour  $x$  compris entre 0 et 2,405, sa dérivée  $J_0'(x)$  est égale à  $-J_1(x)$  et

## Chapitre 4

est négative pour  $x$  compris entre 0 et 3.831, la dérivée seconde  $J_0''(x)$  est négative pour  $x$  compris entre 0 et 1,841 (Abramovitz et Stegun, 1972). On en conclut que les inégalités à vérifier le sont si :

$$cR \leq 1,841 \quad (4-14)$$

En conclusion, on peut exprimer la condition avec le paramètre  $c' = cH/\sqrt{K_p}$ . On pose  $\eta = H/R$  (élancement). On doit avoir :

$$c' = \frac{cH}{\sqrt{K_p}} \leq \inf\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1,841\eta}{\sqrt{K_p}}\right) \quad (4-15)$$

Nous allons maintenant chercher à quelle majoration du chargement conduit la cinématique que nous venons de définir. Nous allons pour cela utiliser la forme particulière de  $U$  définie à partir du produit  $f(r)g(z) = \psi(r,z)$ . On utilise encore le fait qu'une équation aux dérivées partielles est satisfaite (celle qui correspond à la saturation du critère de pertinence), ce qui permet une intégration par parties dans le calcul de la puissance des forces extérieures. On trouve ainsi :

$$P_{rm} = 2\pi N_0 |f'(R)| \int_0^H |g(z)| dz \quad (4-16)$$

$$P_e = \frac{2\pi R}{K_p} f'(R) \int_0^H (H-z)g(z)dz \quad (4-17)$$

En prenant  $f$  et  $g$  donnés respectivement par (4-11) et (4-12) ; on suppose que  $c$  vérifie la condition (4-15) , on a alors :

$$\gamma \leq \frac{K_p N_0}{RH} \frac{\int_0^1 \cos(c'u) du}{\int_0^1 (1-u) \cos(c'u) du} = \frac{K_p N_0}{RH} \frac{c' \operatorname{sinc} c'}{1 - \cos c'} \quad (4-18)$$

L'étude du rapport  $c' \operatorname{sinc} c' / (1 - \cos c')$  montre que ce rapport décroît de 2 à  $\pi/2$  pour  $c'$  compris entre 0 et  $\pi/2$ . Finalement, on tire de cette étude cinématique la conclusion suivante :

$$\frac{\gamma^+ RH}{K_p N_0} \leq \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } \eta \geq 0,853\sqrt{K_p} \\ \frac{\frac{1,841\eta}{\sqrt{K_p}} \sin(\frac{1,841\eta}{\sqrt{K_p}})}{1 - \cos(\frac{1,841\eta}{\sqrt{K_p}})} & \text{si } \eta \leq 0,853\sqrt{K_p} \end{cases} \quad (4-19)$$

La figure ci-après donne le majorant  $f_1^c$  de  $\gamma RH / K_p N_o$  que l'on tire de (4-19).

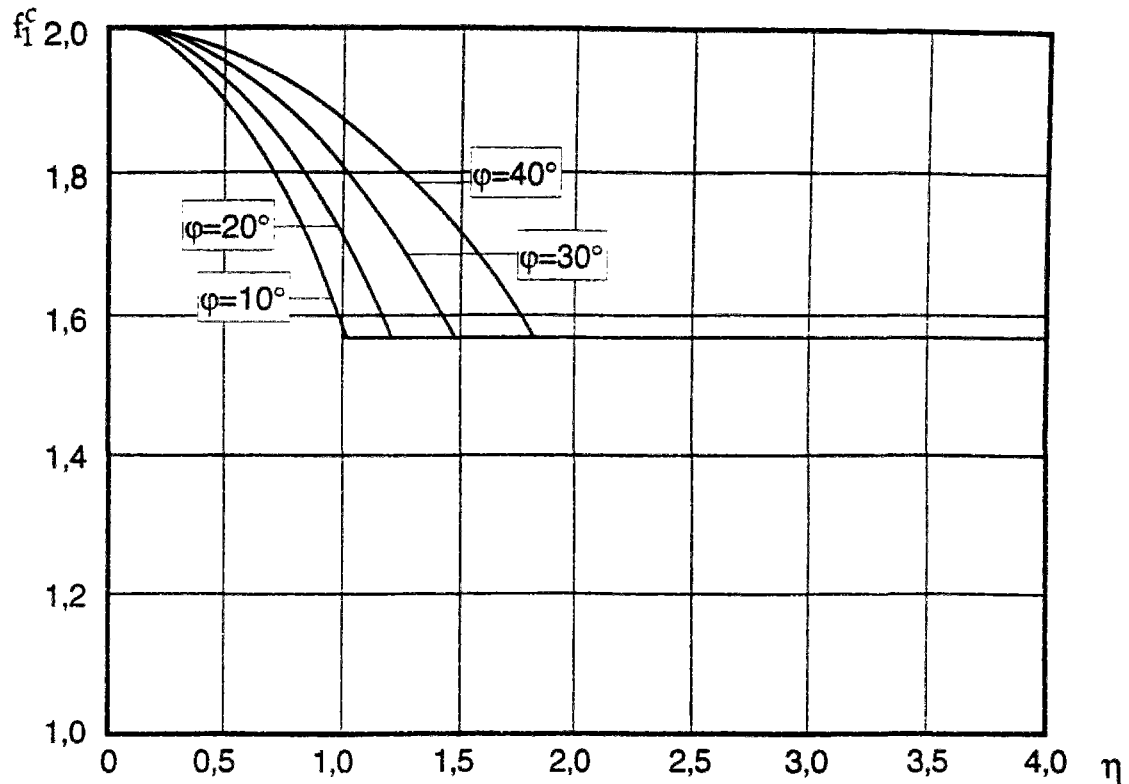


Figure 4-1 Majorant obtenu avec la cinématique solution particulière d'une équation aux dérivées partielles

#### 4.3.2 Cinématique obtenue par symétrisation d'un mécanisme « par blocs »

On considère une cinématique par blocs définie par la donnée d'un angle  $\alpha$  et de vitesses  $U$  et  $V$ .

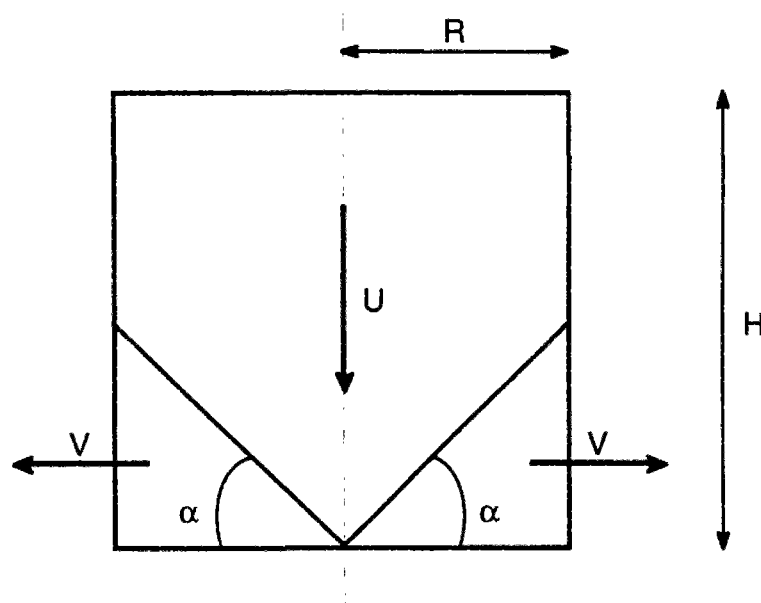


Figure 4-2 Cinématique par blocs dans le cas d'interface lisse entre le remblai et le substratum



On utilise le même mode de construction qu'en 3.3. On trouve :

$$\begin{cases} v_r = 0 & v_z = -U & \text{si } u = \frac{z}{r \tan \alpha} \geq 1 \\ v_r = \frac{V}{\pi} \sqrt{1-u^2} & v_z = U \left( \frac{2}{\pi} \arccos(u) - 1 \right) & \text{si } u = \frac{z}{r \tan \alpha} \leq 1 \end{cases} \quad (4-20)$$

On détermine la condition de pertinence pour le mécanisme par blocs :

$$\tan(\alpha - \varphi) \geq \frac{U}{V} \quad (4-21)$$

Cette condition est suffisante pour que la cinématique soit pertinente pour le mécanisme symétrisé. Comme la puissance des efforts extérieurs est clairement proportionnelle à  $U$  alors que la puissance résistante maximale ne dépend que de  $V$ , on en déduit que le choix optimal est :

$$U = V \tan(\alpha - \varphi) \quad (4-22)$$

Nous supposons dans la suite que la condition ci-dessus est vérifiée. On peut vérifier également que l'équation aux dérivées partielles suivante est satisfaite :

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\tan(\alpha - \varphi)}{\tan(\alpha)} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) \quad (4-23)$$

En utilisant cette relation, on obtient par intégration par parties, l'expression suivante pour la puissance des forces extérieures :

$$P_e = 2\pi R \gamma \frac{\tan(\alpha - \varphi)}{\tan(\alpha)} \int_0^H (H - z) v_r(r = R, z) dz \quad (4-24)$$

Soit finalement :

$$P_e = 2V\gamma R^2 H \tan(\alpha - \varphi) \int_0^{\inf(1, \eta/\tan \alpha)} \left( 1 - \frac{\tan \alpha}{\eta} u \right) \sqrt{1-u^2} du \quad (4-25)$$

On calcule de même la puissance résistante maximale :

$$P_{rm} = 2N_0 V R \tan \alpha \int_0^{\inf(1, \eta/\tan \alpha)} \sqrt{1-u^2} du \quad (4-26)$$

Et on déduit finalement :

$$\gamma^+ \leq \frac{N_0 K_P}{HR} f_2^c(\eta, \varphi) \quad (4-27)$$

avec :

$$f_2^c(\eta, \varphi) = \inf_{\alpha} \left( \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right)^2 \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha - \varphi)} \frac{\int_0^{\inf(1, \eta/\tan \alpha)} \sqrt{1-u^2} du}{\int_0^{\inf(1, \eta/\tan \alpha)} \left(1 - \frac{\tan \alpha}{\eta} u\right) \sqrt{1-u^2} du} \quad (4-28)$$

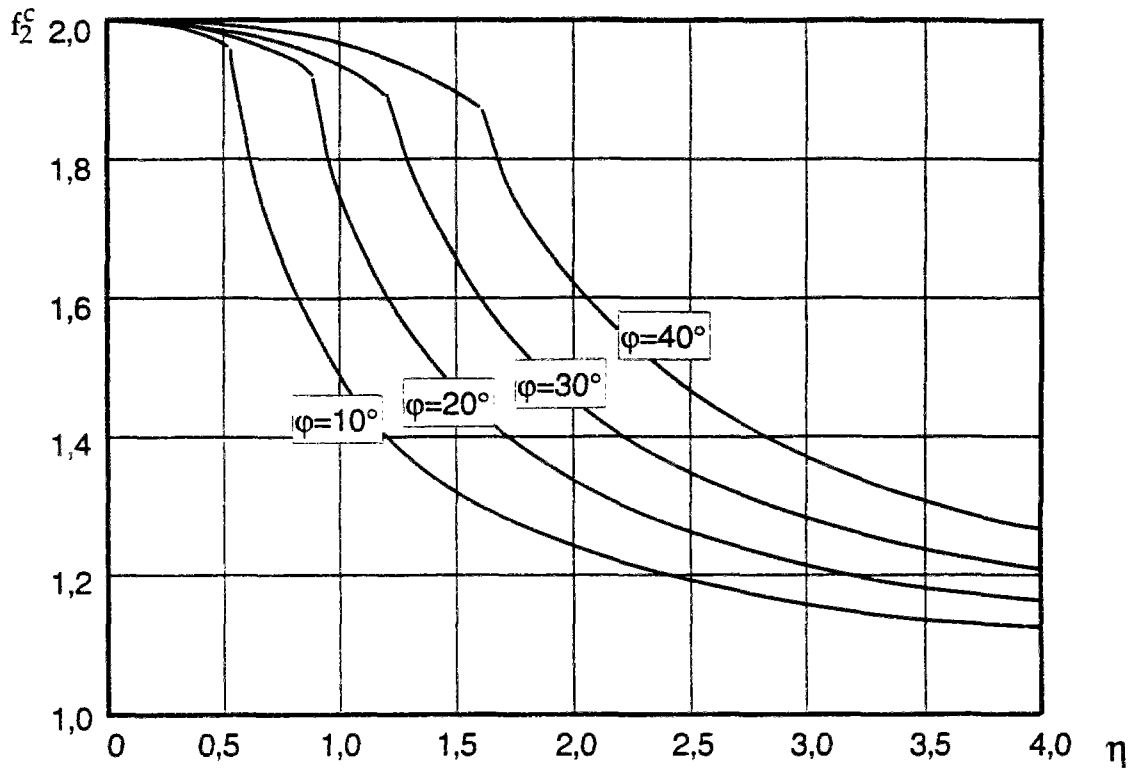


Figure 4-3 Majorant obtenu par le mécanisme symétrisé d'un champ par blocs

### 4.3.3 Prise en compte de la résistance à la flexion

Une comparaison complète avec les travaux antérieurs nécessite de prendre en compte l'effet de la résistance à la flexion des palplanches. Nous n'effectuerons pas l'étude paramétrique complète correspondante et nous nous limiterons à un exemple numérique particulièrement simple.

On considère un gabion ayant les caractéristiques suivantes :

$$H=20 \text{ m} ; R=10 \text{ m} ; N_0=3000 \text{ kN/m} ; M_0=\sigma_0 e^2 / 4=9 \text{ kNm/m} ; \varphi=40^\circ.$$

## Chapitre 4

Dans ce cas, la solution optimale est donnée par le premier mécanisme étudié. La puissance des efforts extérieurs reste inchangée par rapport à la situation où l'on ne prenait pas en compte la résistance à la flexion. Il suffit donc d'examiner ce qui change pour la puissance résistante maximale.

On vérifie alors que l'on a en utilisant que  $\eta \geq \frac{1}{1,841} \frac{\pi}{2} \sqrt{K_p}$  ce qui permet de prendre  $\frac{c}{\sqrt{K_p}} = \frac{\pi}{2H}$  dans (4-11) :

$$P'_{rm} = P_{rm} \left( 1 + \frac{R}{H^2} \frac{M_0}{N_0} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \right) \quad (4-29)$$

Numériquement, on trouve  $P'_{rm} \approx 1,00018 P_{rm}$ . L'effet de la flexion est négligeable dans ce cas. La prise en compte d'une valeur de  $M_0$  plus importante ne changerait pas cette conclusion.

Dans le cas où le meilleur majorant est fourni par la symétrisation d'un mécanisme par blocs, la correction à apporter pour tenir compte de la résistance à la flexion sera plus importante. Elle peut être évaluée comme dans le cas de la cinématique étudiée précédemment quand on prenait en compte une interface frottante entre le remblai et le substratum.

#### 4.3.4 Conclusion et comparaison avec les travaux antérieurs

En utilisant les deux cinématiques que nous avons construites, on obtient finalement un majorant  $f^c$  égal à  $\inf(f_1^c, f_2^c)$  pour le cas où l'on ne prend pas en compte la résistance à la flexion des palplanches. La figure ci-après résume les résultats obtenus.

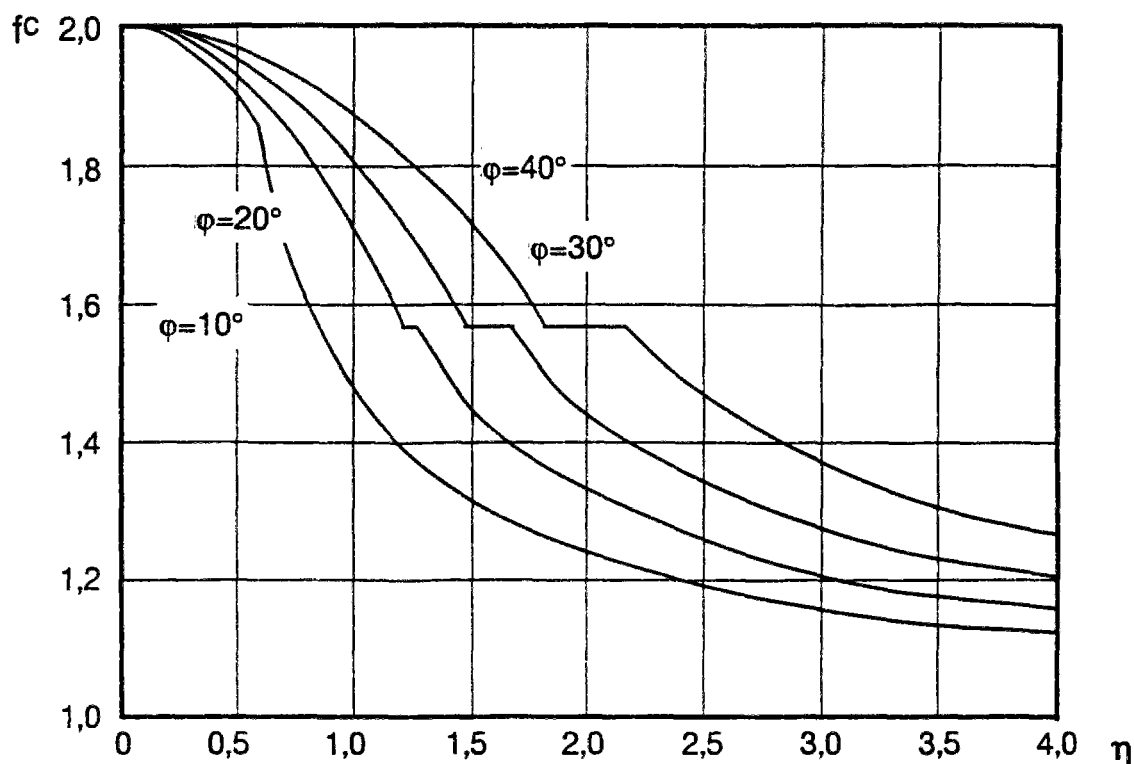


Figure 4-4 Majorant obtenu à l'aide des deux mécanismes

Ces résultats peuvent être comparés à ceux de Dormieux et Delaurens (1991). Ceux-ci ont abouti à un majorant  $f^c=2$ , mais pour des cinématiques où les palplanches restent rigides. Le mécanisme utilisé est une déformation homogène dans le remblai.

On voit que l'amélioration est très sensible, une borne statique correspond à  $f=1$ . La prise en compte de la résistance à la flexion n'est pas de nature à remettre en cause cette amélioration. Nous l'avons montré au paragraphe précédent sur un exemple significatif. Sur cet exemple avec des valeurs numériques réalistes, on voit que l'écart entre la borne statique (obtenue sans prendre en compte la résistance à la flexion) et la borne cinématique est diminué de 43% par rapport aux résultats de Dormieux et Delaurens.

## 4.4 Mécanisme sans glissement à l'interface remblai/substratum

### 4.4.1 Construction d'un champ de vitesse symétrisé

Pour l'application de la méthode cinématique au problème du gabion isolé, il est nécessaire de construire dans le remblai un champ de vitesse adapté le mieux possible à notre problème, c'est-à-dire qui conduise à un majorant du chargement maximal le plus petit possible.

Parmi les champs cinématiques utilisés dans les études antérieures, seuls ceux de l'étude de 1992 permettent de prendre en compte le frottement du remblai sur le substratum. La prise en compte de ce frottement est indispensable pour pouvoir rendre compte de la résistance à une force horizontale du gabion simplement posé sur un substratum rigide.

Nous allons donc construire, à partir d'un champ par bloc, un champ symétrisé qui vérifiera les conditions cinématiques éventuelles comme le champ par bloc de départ, qui aura la même puissance des efforts extérieurs mais qui aura une puissance résistante maximale réduite. Un tel champ conduit donc à une meilleure majoration du chargement extrême.

### 4.4.2 Hypothèses et notations

On considère un gabion reposant sur un substratum rigide de hauteur  $H$  de rayon  $R$ . Le remblai est constitué d'un matériau purement frottant, d'angle de frottement interne  $\varphi$  et de poids volumique  $\gamma$ .

La coque est caractérisée par une condition de résistance portant sur l'effort normal  $N_{\theta\theta}$  ; on doit avoir  $|N_{\theta\theta}| \leq N_0$ . En ce qui concerne la résistance au moment fléchissant, on envisagera deux cas selon que cette résistance peut être négligée ou qu'elle est prise en compte par une condition  $|M_{zz}| \leq M_0$ .

On suppose que l'interface entre le remblai et les palplanches est lisse. On ne fait pas d'hypothèse particulière sur l'interface entre le remblai et le substratum qui peut en particulier être frottant. Dans un premier temps, on ne fait pas non plus d'hypothèses particulières sur la liaison entre le bord inférieur des palplanches et le substratum.

### 4.4.3 Expression du champ symétrisé

On considère dans le remblai le champ par blocs suivant (Figure 4-5), les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  restant arbitraires :

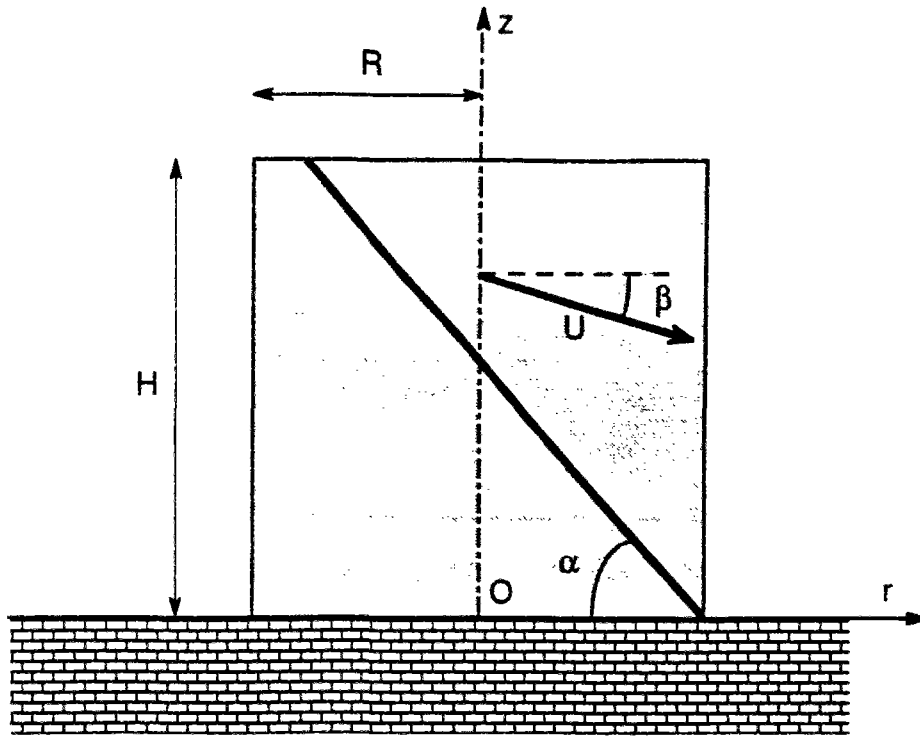


Figure 4-5 Champ par blocs dans le remblai servant de base à la construction d'un champ symétrisé

Ce champ est donc caractérisé par deux blocs séparés par un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale et le bord inférieur de l'enceinte de palplanche est tangent à ce plan. Le bloc inférieur reste immobile et le bloc supérieur est en translation avec une vitesse  $U$ . Cette vitesse est contenue dans le plan de symétrie des blocs et est inclinée d'un angle  $\beta$  par rapport à l'horizontale.

On trouve le champ symétrisé  $\underline{U}_\infty$ , que nous noterons  $\underline{u}$  pour alléger les notations en choisissant  $U=1/\sin\beta$  et en utilisant la définition (4-1) du champ symétrisé :

$$\left\{ \begin{array}{lll} v_r = 0 & v_z = 0 & \text{si } u' \geq 1 \quad (\text{zone 1}) \\ v_r = \frac{1}{\pi \tan \beta} \sqrt{1 - u'^2} & v_z = -\frac{1}{\pi} \arccos(u') & \text{si } 1 \geq u' \geq -1 (\text{zone 2}) \\ v_r = 0 & v_z = -1 & \text{si } -1 \geq u' \quad (\text{zone 3}) \end{array} \right. \quad (4.30)$$

avec  $u' = \frac{R \tan \alpha - z}{r \tan \alpha}$

On distingue donc plusieurs zones dans le remblai selon la valeur du paramètre  $u'$  (Figure 4-6) :

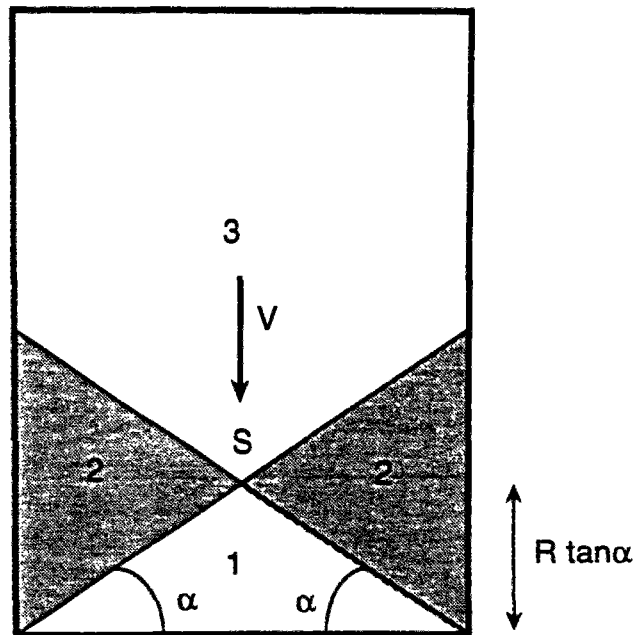


Figure 4-6 Zones du champ de déformation

Le champ de vitesse est nul dans la zone 1 qui est un cône comme sommet le point S de coordonnées  $(r=0, z=R\tan\alpha)$ . La zone 3 est animée d'un mouvement de translation. Dans la zone 2, le champ de vitesse est un champ de déformation. On remarque que le champ de vitesse est continu en tout point du remblai à l'exception du point S.

On peut chercher directement sous quelle condition ce champ est pertinent pour le critère de Coulomb. Le champ est évidemment pertinent dans les zones 1 et 3 et comme il n'y a pas de surface de discontinuité du champ, il reste seulement à s'assurer que le champ est pertinent dans la zone 2. Pour cela, il faut d'abord calculer le tenseur de déformation dans cette zone 2. On trouve :

$$\underline{d} = \frac{1}{\pi r \tan \beta} \begin{pmatrix} \frac{u'^2}{\sqrt{1-u'^2}} & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tan \alpha} - \tan \beta \right) \frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}} \\ 0 & \sqrt{1-u'^2} & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tan \alpha} - \tan \beta \right) \frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}} & 0 & -\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \frac{1}{\sqrt{1-u'^2}} \end{pmatrix} \quad (4-31)$$

Il faut ensuite vérifier que la condition de pertinence du critère de Coulomb est bien vérifiée. Nous rappelons cette condition de pertinence :

$$\text{tr}(\underline{d}) \geq \sin \varphi (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \quad (4-32)$$

On calcule la trace de  $\underline{d}$  ainsi que les valeurs propres  $d_1, d_2, d_3$ . On obtient la condition suivante :

$$1 - \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} - \sin \varphi \left( 1 - u'^2 + \sqrt{u'^2 + \tan^2 \beta} \sqrt{u'^2 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} \right) \geq 0 \quad (4-33)$$

On vérifie que cette condition est vérifiée pour  $u'$  dans  $[-1,1]$  si elle est vérifiée pour  $u'=\pm 1$ . On remplace dans c dans la condition ci-dessus  $u$  par  $\pm 1$ . On trouve après calcul, la condition équivalente  $\tan(\alpha-\varphi) \geq \tan \beta$ . Soit de manière équivalente :

$$(\alpha-\varphi) \geq \beta \geq 0 \quad (4-34)$$

On retrouve ainsi exactement la condition de pertinence du champ par blocs qui nous avait servi de base à notre construction. Un raisonnement direct aurait aussi permis de s'assurer que si la condition de pertinence est satisfaite pour le champ de vitesse de départ, alors elle est aussi satisfaite pour le champ symétrisé. En effet, la puissance résistante maximale du champ symétrisé est inférieure à celle du champ de départ, supposée finie à cause de la condition de pertinence. Alors, la puissance résistante maximale du champ symétrisé est aussi finie.

On note aussi que la vitesse à la base du remblai est nulle (car alors  $u \geq 1$ ) ; la condition de pertinence est donc assurée à l'interface remblai/substratum quel que soit le critère de résistance de cette interface.

#### **4.4.4 Cas du comportement membranaire de l'enceinte de palplanches**

##### **4.4.4.1 Choix d'une cinématique dans la coque**

On suppose maintenant que la résistance à la flexion de la coque est nulle et donc que l'enceinte de palplanches se comporte comme une membrane.

La puissance résistante maximale du remblai pour la cinématique envisagée respectant la condition de pertinence est nulle pour un critère de Coulomb sans cohésion. Il suffit donc de prendre en compte la puissance résistante maximale de la coque.

Il faut préalablement définir la cinématique de la coque. Une première idée consisterait à utiliser la cinématique symétrisée de la cinématique par blocs (Figure 4-7) pour la coque utilisée dans (Buhan et al., 1992).



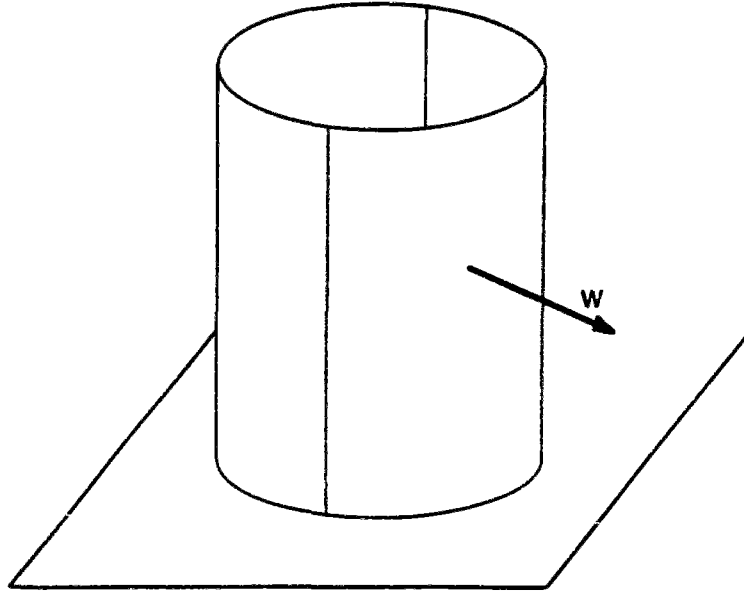


Figure 4-7 Champ par blocs pour la coque (une moitié de la coque reste immobile)

La cinématique qu'on obtiendrait par symétrisation serait caractérisée par une vitesse radiale constante sur toute la coque. Elle conduit à une puissance résistante maximale égale, en fait, à celle de la cinématique par blocs.

Nous allons choisir une cinématique pour la coque caractérisée par :

$$w(z) = v_r(r = R, z) \quad (4-35)$$

La figure ci-après montre l'allure du profil de vitesse dans la coque.

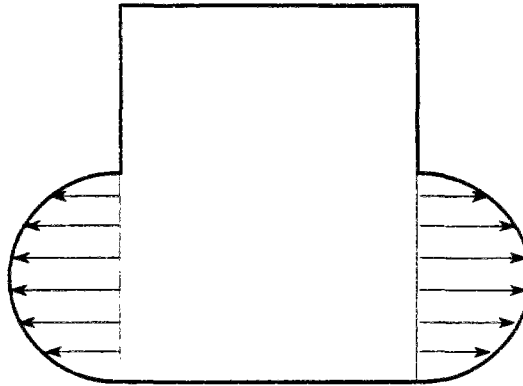


Figure 4-8 Profil de vitesse dans la coque

Dans le cas de l'interface remblai/palplanches lisse, cette cinématique conduit à une puissance résistante maximale d'interface nulle. Comme nous nous plaçons maintenant dans le cas où la résistance à la flexion des palplanches est nulle, la puissance résistante maximale se réduit au terme suivant :

$$P_{rm} = 2\pi N_0 \int_0^H |w(z)| dz \quad (4-36)$$

La puissance des efforts extérieurs qui est due uniquement au poids propre  $\gamma$  du remblai, peut être déterminée de la manière suivante :

$$P_e = 2\pi\gamma \int_0^R \int_0^H -v_z(r,z) r dr dz = 2\pi\gamma \int_0^R \int_0^H (z-H) \frac{\partial v_z}{\partial z} r dr dz \quad (4-37)$$

Pour le champ symétrisé que nous envisageons, on a la relation suivante que l'on soit dans les zones 1, 2 ou 3 :

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (4-38)$$

En reportant cette relation (4-38) dans (4-37), on obtient l'expression ci-après :

$$P_e = 2\pi\gamma R \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \int_0^H (H-z) w(z) dz \quad (4-39)$$

Compte tenu de (4-36) et de (4-39), on peut écrire la condition nécessaire de stabilité résultant de l'étude cinématique :

$$\gamma^+ \leq \frac{N_0 \tan \alpha}{R \tan \beta} \frac{\int_0^H |w(z)| dz}{\int_0^H (H-z) w(z) dz} \quad \text{avec} \quad \beta \leq \alpha - \varphi \quad (4-40)$$

Compte tenu du choix particulier fait pour  $w(z)$  qui est déterminé par (4-4) et (4-35), on constate que le rapport des intégrales figurant dans l'équation précédente est indépendant de  $\beta$ . On en déduit que pour  $\alpha$  donné, la valeur optimale de  $\beta$  (celle donnant le plus petit majorant de  $\gamma^+$ ) est la valeur maximale de  $\beta$  telle que le champ cinématique soit pertinent :

$$\beta = \alpha - \varphi \quad (4-41)$$

Nous retiendrons dans la suite cette valeur de  $\beta$ .

Pour poursuivre les calculs, nous allons être amenés à distinguer deux cas selon la valeur relative de la hauteur  $H$  et de la quantité  $2R \tan \alpha$ .

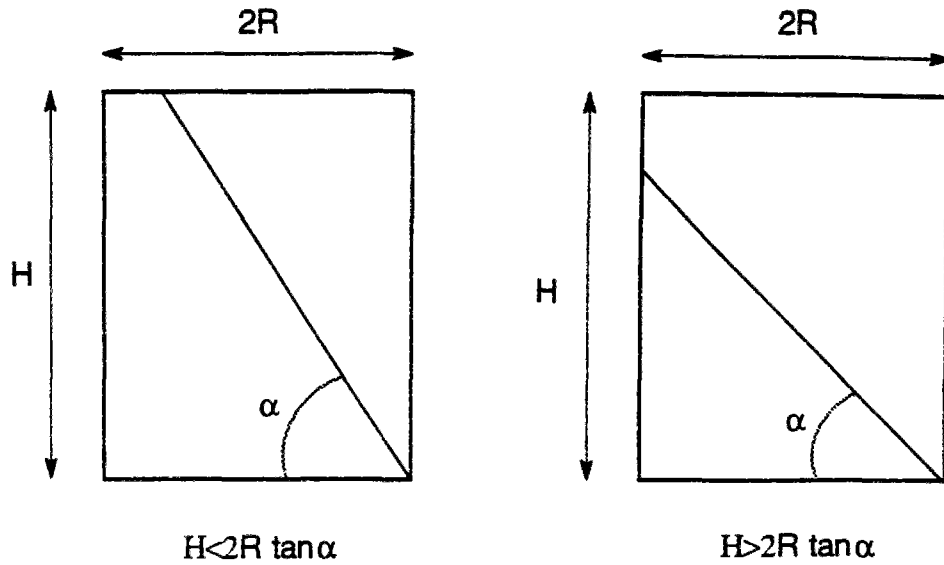


Figure 4-9 Discussion selon les valeurs des paramètres géométriques et de l'angle  $\alpha$

#### 4.4.4.2 Étude dans le cas où $H \geq 2R \tan \alpha$

Dans ce cas, le calcul de la puissance résistante maximale et de la puissance des forces extérieures se simplifie et on obtient pour la puissance résistante maximale l'expression suivante :

$$P_{rm} = \pi R N_0 \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha - \varphi)} \quad (4-42)$$

On introduit l'élancement du gabion  $\eta$  défini par :

$$\eta = \frac{H}{R} \quad (4-43)$$

Exprimons maintenant la puissance des efforts extérieurs en fonction de ce paramètre  $\eta$  :

$$P_e = \pi \gamma R^3 (\eta - \tan \alpha) \quad (4-44)$$

On obtient la majoration suivante du paramètre maximal de chargement :

$$\gamma^+ \leq \frac{N_0}{RH} \left( \frac{\eta \tan \alpha (1 + \tan \alpha \tan \varphi)}{(\eta - \tan \alpha)(\tan \alpha - \tan \varphi)} \right) \quad (4-45)$$

Sous cette forme, on peut facilement dériver le majorant ci-dessus par rapport à  $\tan \alpha$  et on obtient la valeur de  $\tan \alpha$  correspondant à la majoration optimale :

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{\eta \tan \varphi} \left( \sqrt{\eta (\tan \varphi)^3} + \sqrt{(1 + (\tan \varphi)^2)(1 + \eta \tan \varphi)} \right)}{1 + \eta \tan \varphi + (\tan \varphi)^2} \quad (4-46)$$

On pose :

$$f_1^c(\eta, \varphi) = \frac{1}{K_p} \frac{\eta \tan \alpha}{(\eta - \tan \alpha) \tan(\alpha - \varphi)} \quad (4-47)$$

avec dans l'expression précédente  $\tan \alpha$  qui est donnée par (4-46). On peut donc écrire en reformulant (4-45) :

$$\gamma^+ \leq \frac{N_0}{RH} K_p f_1^c \quad (4-48)$$

On obtient ainsi une majoration de  $\gamma^+$  en fonction de  $\eta$  et de  $\varphi$  sous réserve que la valeur de  $\tan \alpha$  donnée par (4-46) soit inférieure à  $\eta/2$ .

L'étude statique (équation 2-13) nous prouve que :

$$f_1^c(\eta, \varphi) \geq 1 \quad (4-49)$$

Remarquons que quand  $\eta$  tend vers l'infini, la valeur de  $\tan \alpha$  donnée par l'expression (4-46) tend vers  $\tan \varphi + \sqrt{1 + (\tan \varphi)^2}$  soit  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ . On obtient alors :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f_1^c(\eta, \varphi) = 1 \quad (4-50)$$

A la limite quand l'élancement devient grand, la zone de la coque en déformation devient de plus en plus petite en proportion (Figure 4-10) et on se rapproche ainsi, pour la coque d'une cinématique donnant la solution exacte pour une coque sans résistance à la flexion soumise à une pression hydrostatique : la déformation de la coque doit être concentrée à la base.

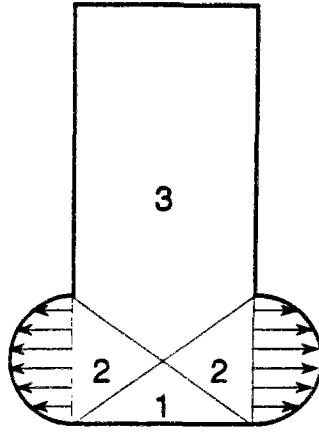


Figure 4-10 Allure du champ cinématique pour  $\eta$  grand

#### 4.4.4.3 Cas où $H < 2R \tan \alpha$

L'expression de la puissance résistante maximale et de la puissance des forces extérieures ne peut pas se simplifier autant que dans le cas précédent. En utilisant la variable adimensionnelle  $u'$  définie en (4-30), on obtient :

$$P_e = 2\gamma HR^2 \int_{(1-\frac{\eta}{\tan \alpha})}^1 (1 - \frac{\tan \alpha}{\eta}(1-u')) \sqrt{1-u'^2} du' \quad (4-51)$$

$$P_{rm} = 2N_0 R \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha - \varphi)} \int_{1-\frac{\eta}{\tan \alpha}}^1 \sqrt{1-u'^2} du' \quad (4-52)$$

On obtient ainsi la majoration suivante :

$$\gamma^+ \leq \frac{N_0}{HR} K_p f(\eta, \varphi, \alpha) \quad (4-53)$$

avec :

$$f(\eta, \varphi, \alpha) = \left( \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right)^2 \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha - \varphi)} \frac{\int_{1-\frac{\eta}{\tan \alpha}}^1 \sqrt{1-u'^2} du'}{\int_{(1-\frac{\eta}{\tan \alpha})}^1 (1 - \frac{\tan \alpha}{\eta}(1-u')) \sqrt{1-u'^2} du'} \quad (4-54)$$

La majoration (4-53) est valide pour tout  $\alpha$  tel que  $\tan \alpha \geq \eta/2$ . La valeur optimale de  $\alpha$  qui minimise  $f$ , peut être déterminée numériquement. On la note  $f_2^c(\eta, \varphi)$ .

On a donc :

$$\gamma^+ \leq \frac{N_0}{HR} K_p f_2^c(\eta, \varphi) \quad (4-55)$$

Compte tenu de l'étude statique dans le cas de l'équilibre membranaire, on a l'inégalité suivante :

$$f_2^c(\eta, \varphi) \geq 1 \quad (4-56)$$

On peut étudier le comportement quand l'élancement devient petit. On peut montrer en utilisant des développements limités que :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} f(\eta, \varphi, \alpha) = \frac{5}{2} \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha - \varphi)} \quad (4-57)$$

La valeur optimale de  $\frac{5}{2} \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha - \varphi)}$  est atteinte pour  $\tan \alpha = \tan \varphi + \sqrt{(\tan \varphi)^2 + 1}$  soit  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ . On conclut finalement :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} f_2^c(\eta, \varphi) = \frac{5}{2} \quad (4-58)$$

#### 4.4.4.4 Tracé d'un majorant de $\gamma^+$

En combinant les majorations (4-48) et (4-55)), on peut donner un majorant de  $\gamma^+$ , pour l'ensemble des valeurs de  $\eta$  et de  $\varphi$ .

On a tracé en fait un majorant  $f^c$  de  $\frac{\gamma^+ RH}{N_0 K_p}$  égal à  $\inf(f_1^c, f_2^c)$  quand  $f_1^c$  et  $f_2^c$  sont tous les deux définis . Les majorants pour les élancements faibles sont obtenus par  $f_2^c$  ; pour les grands élancements, ils sont obtenus par  $f_1^c$ .

On observe le comportement asymptotique des majorants que nous avons trouvés : le majorant de  $\frac{\gamma^+ RH}{N_0 K_p}$  tend (lentement) vers 1 quand  $\eta$  tend vers l'infini, et vers 5/2 quand  $\eta$  tend vers 0.

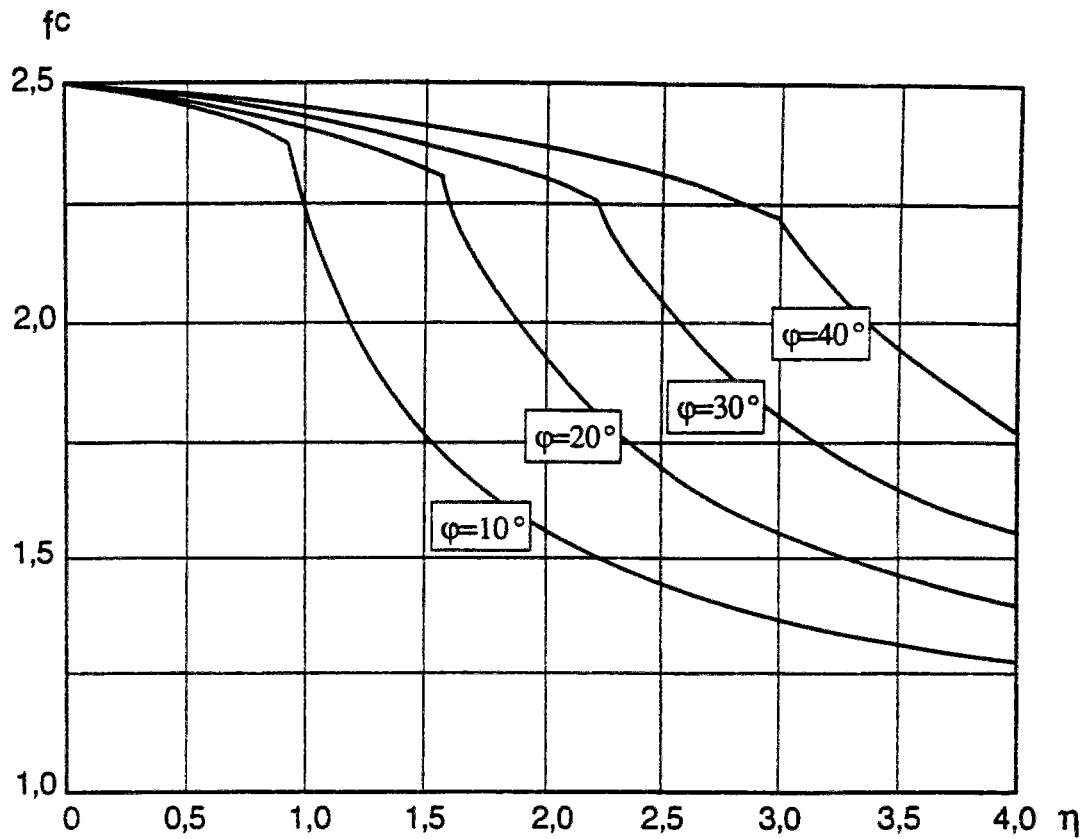


Figure 4-11 Majorant du chargement maximal

Nous donnons également la valeur de l'angle  $\alpha$  correspondant au mécanisme donnant le majorant  $f^c$ .

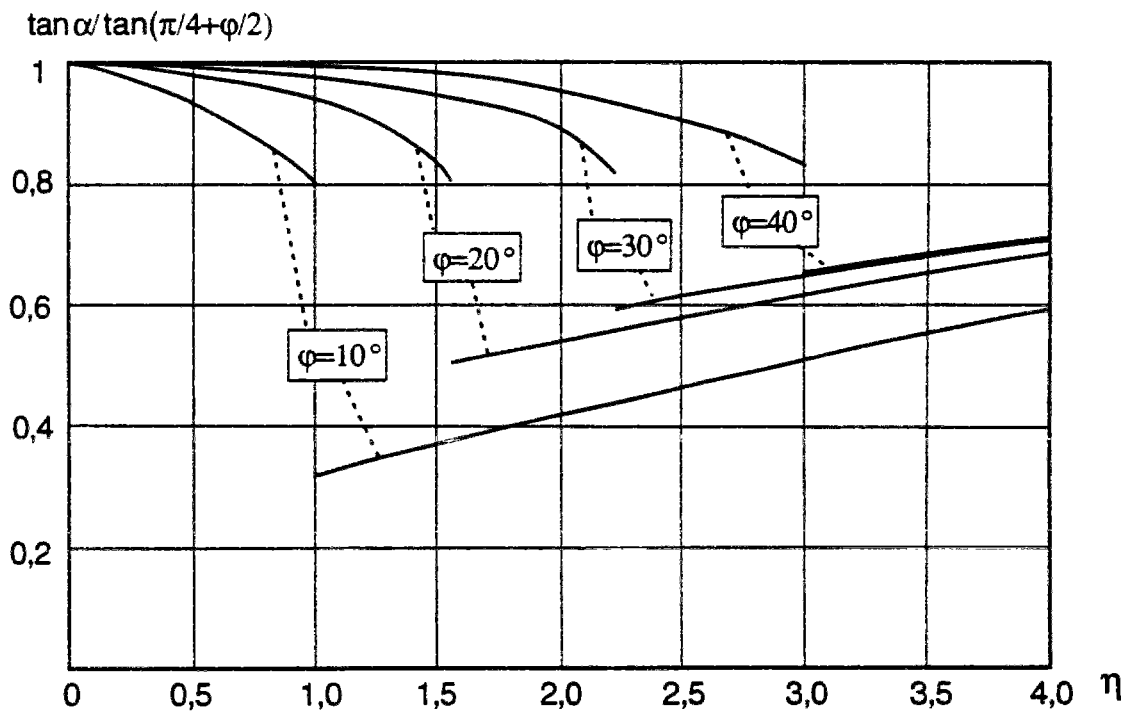


Figure 4-12 Tangente de l'angle optimal rapportée à  $\sqrt{K_a}$

On observe une discontinuité de l'angle optimal en fonction de l'élanement  $\eta$ . Ceci s'explique par l'existence de deux variantes du mécanisme envisagé selon que le plan d'angle  $\alpha$  avec l'horizontale (plan limitant les deux blocs du mécanisme non encore symétrisé) coupe ou non le plan horizontal qui constitue la limite supérieure du gabion. La discontinuité résulte du changement de variante optimale du mécanisme (Figure 4-13). La discontinuité de la tangente des courbes  $\eta \rightarrow f^c(\eta, \varphi)$  s'explique de la même manière (Figure 4-11).

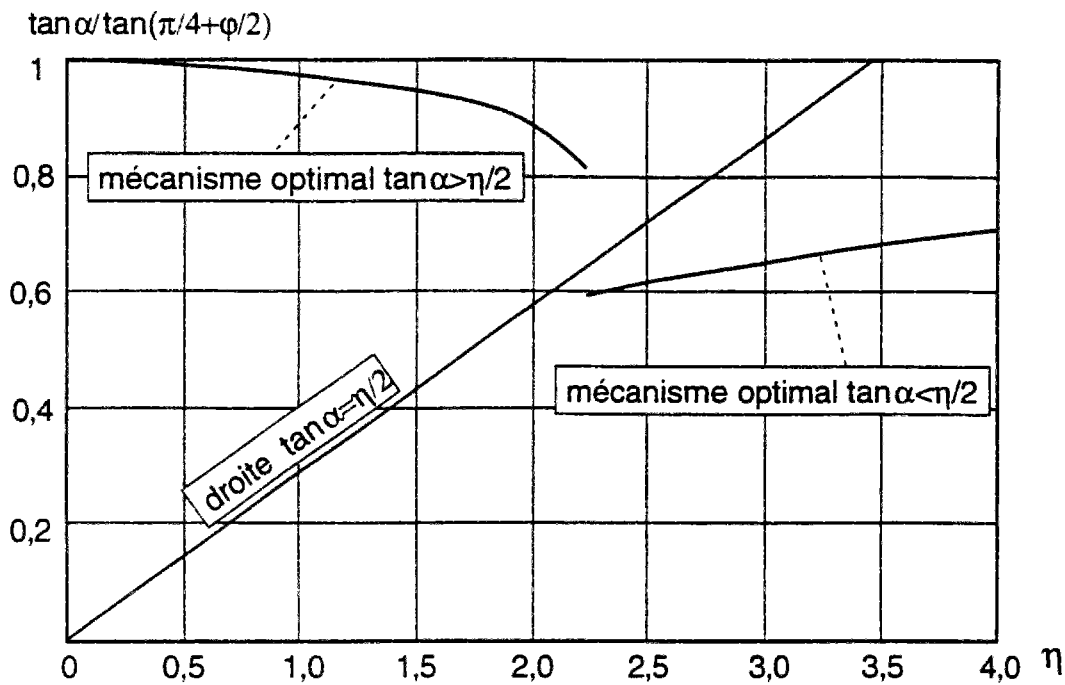


Figure 4-13 Mécanisme optimal en fonction de  $\eta$  (cas  $\varphi=30^\circ$ )

#### 4.4.4.5 Comparaison avec les résultats antérieurs

Les résultats auxquels on peut comparer nos résultats ci-dessus doivent satisfaire les conditions suivantes : remblai frottant, interface remblai/substratum frottante. L'étude (Buhan et al., 1992) remplit ces conditions. Les deux types de mécanismes envisagés dans cette étude sont schématisés dans le tableau 4-1.

Il ressort de l'étude précitée que c'est le mécanisme à deux blocs dans le remblai qui donne la meilleure borne, c'est-à-dire précisément le mécanisme qui a servi de base à la construction de notre cinématique symétrisée.

On peut alors réaliser une étude paramétrique comme celle que nous avons menée pour le mécanisme symétrisé. Comme pour le mécanisme symétrisé, on est amené à distinguer entre deux cas :  $\tan \alpha \geq \eta/2$  et  $\tan \alpha \leq \eta/2$ .



Dans le cas  $\tan \alpha \leq \eta/2$ , on obtient les majorations suivantes :

$$\gamma^+ \leq \frac{N_0}{RH} K_p f_3^c \quad (4-59)$$

avec :

$$f_3^c(\varphi, \eta, \alpha) = \frac{2\eta^2 \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})}{\pi \tan(\alpha - \varphi)(\eta - \tan \alpha)} \quad (4-60)$$

On trouve de la même manière que précédemment la valeur optimale de  $\alpha$  :

$$\alpha_{\text{opt}} = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 + \eta \sin \varphi} - \cos \varphi}{\sin \varphi}\right) \quad (4-61)$$

On remplace dans (4-59)  $\alpha$  par  $\alpha_{\text{opt}}$  sous réserve que  $\tan(\alpha_{\text{opt}}) \leq \eta/2$  et on obtient ainsi la valeur optimisée de  $f_3^c(\varphi, \eta, \alpha)$ .

Le comportement de  $f_3^c$  est très différent de celui de son homologue  $f_1^c$  quand  $\eta$  devient grand. Au lieu de tendre vers une limite finie, il a un comportement asymptotique dont le terme principal est linéaire en  $\eta$  :

$$f_3^c \sim \frac{2}{\pi} \frac{\tan \varphi}{\tan^2(\pi/4 + \varphi/2)} \eta \quad \text{pour } \eta \rightarrow \infty \quad (4-62)$$

Dans le cas  $\tan \alpha \geq \eta/2$ , on a la relation homologue de (4-59) avec cette fois :

$$f_4^c(\varphi, \eta, \alpha) = \frac{\eta \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})}{\tan(\alpha - \varphi) \int_{1-\frac{\eta}{\tan \alpha}}^1 (1 - \frac{\tan \alpha}{\eta}(1-u')) \sqrt{1-u'^2} du'} \quad (4-63)$$

Comme pour le mécanisme symétrisé,  $f_4^c$  fait l'objet d'une optimisation numérique portant sur le paramètre  $\alpha$  qui est assujéti dans ce cas à la condition  $\tan \alpha \geq \eta/2$ . Il est donc naturel que pour les petites valeurs de  $\eta$ , la meilleure majoration soit donnée par  $f_4^c$ .

On peut donc tracer (Figure 4-14) le meilleur majorant correspondant au mécanisme avec deux blocs ; ce majorant est égal à  $\inf(f_3^c, f_4^c)$ .

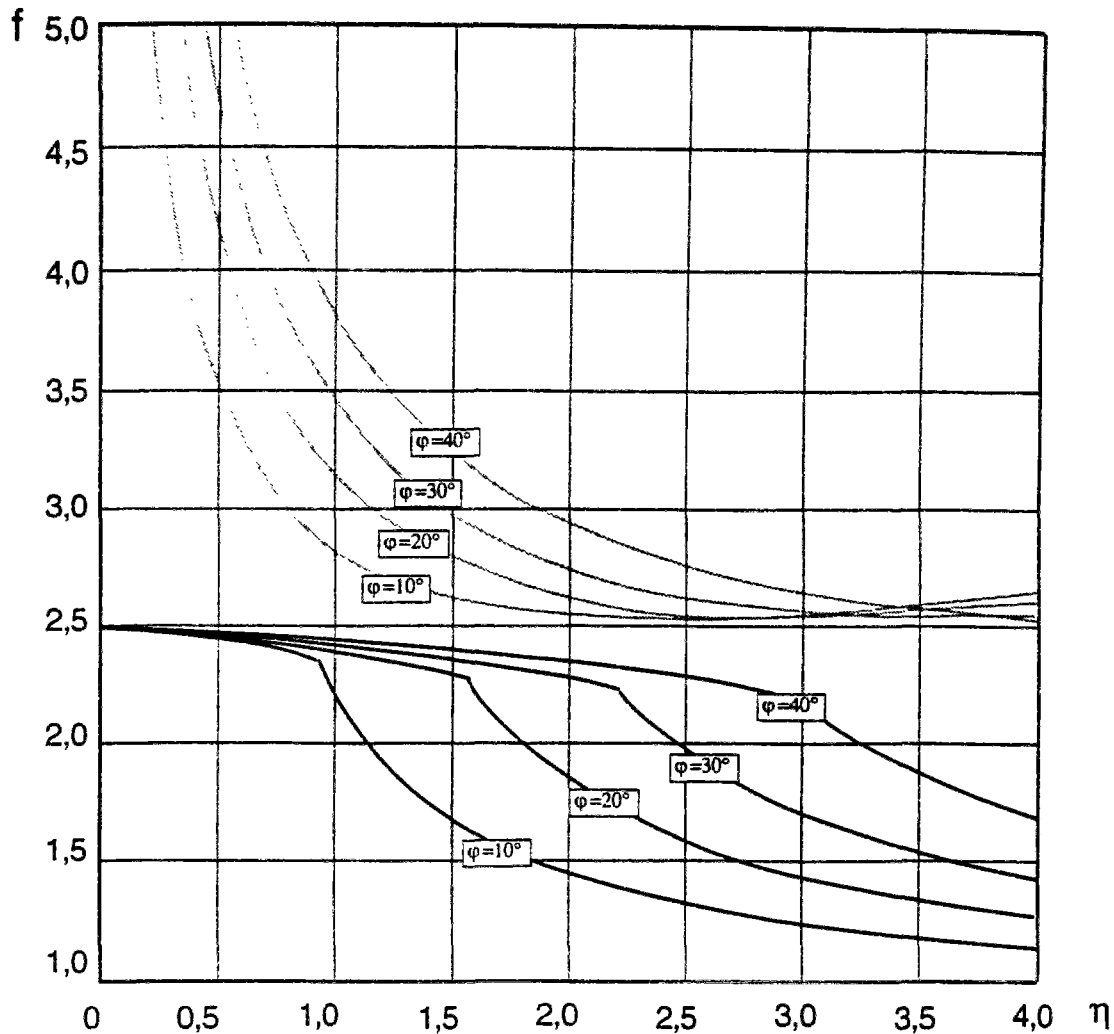


Figure 4- 14 Comparaison des bornes cinématiques obtenues par le mécanisme à deux blocs (courbes grisés) et par le mécanisme symétrisé (courbes noires)

La comparaison entre les courbes correspondant à  $\varphi$  donné au mécanisme par blocs et au mécanisme symétrisé montre l'amélioration très substantielle réalisée grâce au mécanisme symétrisé.

Ce constat doit être néanmoins nuancé par la prise en compte de la résistance à la flexion des palplanches. Les bornes données par le mécanisme à deux blocs sont également valables dans le cas d'une coque résistant à la flexion, ce qui n'est pas le cas pour le mécanisme symétrisé.

#### 4.4.5 Prise en compte de la résistance à la flexion

##### 4.4.5.1 Nécessité de modifier le champ de déformation de la coque

Le champ de déformation de la coque que nous avons utilisé précédemment dans l'hypothèse où la coque se comporterait comme une membrane, n'est plus pertinent dans le cas où la coque a une résistance à la flexion. En effet, la puissance

résistante maximale devient infinie à cause du terme dû à la résistance à la flexion (la dérivée de  $w$  est infinie en  $z=0$  comme nous allons le voir).

Pour  $z \leq 2R \tan \alpha$ ,  $w(z)$  est donné par la relation rappelée ci-dessous :

$$w(z) = \frac{1}{\pi \tan \beta} \sqrt{1 - \left( \frac{R \tan \alpha - z}{R \tan \alpha} \right)^2} \quad (4-64)$$

La dérivée de  $w$  par rapport à  $z$  s'écrit donc :

$$w'(z) = \frac{1}{\pi R \tan \alpha \tan \beta} \frac{1 - \frac{z}{R \tan \alpha}}{\sqrt{1 - \left( 1 - \frac{z}{R \tan \alpha} \right)^2}} \quad (4-65)$$

On constate que  $w'$  tend vers l'infini quand  $z$  tend vers 0 ou vers  $2R \tan \alpha$ . Ceci va donner une contribution infinie  $2\pi R M_0 \int |w'| dz$  due à la résistance à la flexion dans les deux cas suivants : bord inférieur encastré ou coque telle que  $H > 2R \tan \alpha$ .

Mais la puissance résistante maximale peut aussi devenir infinie par divergence de l'intégrale  $2\pi R M_0 \int_0^H |w''| dz$ . Cette intégrale est minorée de la manière suivante :

$$2\pi R M_0 \int_0^H |w''(z)| dz \geq 2\pi R M_0 \left| \int_{\varepsilon}^{R \tan \alpha} w''(z) dz \right| \geq 2\pi R M_0 |w'(\varepsilon)| \quad (4-66)$$

Comme la limite de  $w'$  est infinie quand  $z$  tend vers zéro, on en déduit que le champ symétrisé que nous avons utilisé jusqu'à maintenant n'est pas pertinent si les palplanches résistent à la flexion.

#### 4.4.5.2 Définition d'un nouveau type de champ

On considère dans le remblai le champ décalé vers le haut de la hauteur  $b$ . Il est défini par :

$$\begin{cases} v_r = 0 & v_z = 0 & \text{si } u'' \geq 1 \quad (\text{zone 1}) \\ v_r = \frac{1}{\pi \tan \beta} \sqrt{1 - u''^2} & v_z = -\frac{1}{\pi} \arccos(u'') & \text{si } 1 \geq u'' \geq -1 \quad (\text{zone 2}) \\ v_r = 0 & v_z = -1 & \text{si } -1 \geq u'' \quad (\text{zone 3}) \end{cases} \quad (4-67)$$

avec  $u'' = \frac{R \tan \alpha - (z - b)}{r \tan \alpha}$

On doit maintenant définir un nouveau champ dans la coque qui soit pertinent pour une coque résistant à la flexion (Figure 4-15).

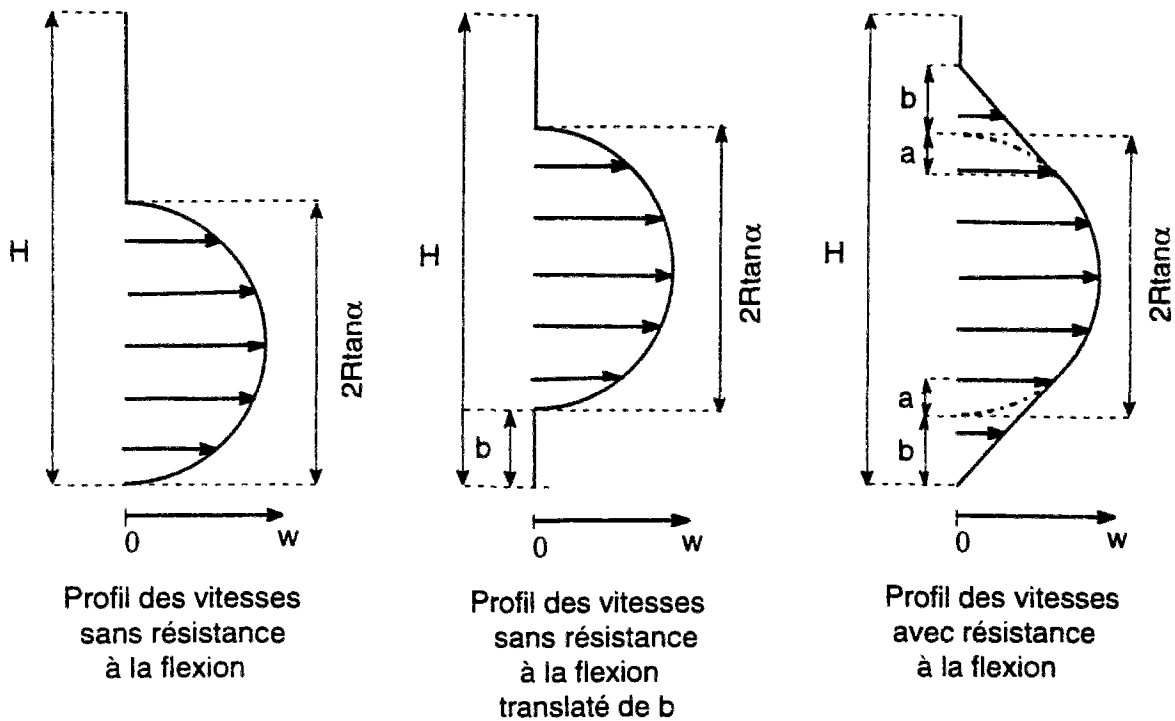


Figure 4-15 Profil des vitesses pour le champ symétrisé avec et sans modification pour tenir compte de la résistance à la flexion

On rappelle que  $u'' = 1 - \frac{z-b}{R \tan \alpha}$  pour un point situé sur la coque et on pose :

$$\delta = \frac{b}{R \tan \alpha}; \epsilon = \frac{a}{R \tan \alpha} \quad (4-68)$$

On peut écrire pour ce nouveau champ dans la coque :

$$w(u'') = \frac{1}{\pi \tan \beta} \sqrt{1 - u''^2} \text{ pour } -1 + \epsilon \leq u'' \leq 1 - \epsilon \quad (4-69)$$

$$w(u'') = \frac{1}{\pi \tan \beta} \left( -\frac{\sqrt{2\epsilon - \epsilon^2}}{\beta + \epsilon} (u'' - (1 - \epsilon)) + \sqrt{2\epsilon - \epsilon^2} \right) \text{ pour } 1 - \epsilon \leq u'' \leq 1 + \delta \quad (4-70)$$

$$w(u'') = \frac{1}{\pi \tan \beta} \left( -\frac{\sqrt{2\epsilon - \epsilon^2}}{\beta + \epsilon} (u'' + (1 - \epsilon)) + \sqrt{2\epsilon - \epsilon^2} \right) \text{ pour } -1 - \delta \leq u'' \leq \epsilon - 1 \quad (4-71)$$

Avec ce nouveau champ, la contribution du terme dû à la flexion devient finie. Nous allons choisir b de telle sorte que les raccordements de w en  $u'' = 1 - \epsilon, -1 + \epsilon$  se fassent avec continuité de la tangente.

On trouve :

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad (4-72)$$

On peut vérifier aisément que le champ ainsi modifié donne partout des vitesses de déplacement vers l'extérieur plus grandes que le nouveau champ que nous avons choisi pour le remblai, ce qui assure qu'il est compatible avec le déplacement du remblai dans le cas d'une interface lisse.

#### 4.4.5.3 Optimisation approchée de ce nouveau champ

On peut rechercher la valeur optimale de  $\varepsilon$  qui minimise l'augmentation de la puissance résistante maximale par rapport au cas où l'on ne tiendrait pas compte de la résistance à la flexion. On se place dans l'hypothèse où  $u$  variait de -1 à 1 dans le champ de départ (c'est-à-dire que l'on avait  $H > 2R \tan \alpha$ , on suppose même que  $H > 2R \tan \alpha + 2b$ ), où le bord inférieur est encastré et où l'on a déjà déterminé l'angle "optimal"  $\alpha$ .

On peut récrire la puissance résistante maximale pour ce champ de vitesses modifié :

$$P_{rm} = 2\pi R \int_0^H \left( \frac{N_0}{R} |w(z)| + M_0 \left| \frac{d^2 w(z)}{dz^2} \right| \right) dz \quad (4-73)$$

On remplace dans cette expression  $w(z)$  par sa valeur donnée par (4-69), (4-70), (4-71) ; il vient :

$$P_{rm} = 2RN_0 \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left( \sqrt{1-u''^2} + \frac{M_0}{N_0 R \tan^2 \alpha} \frac{d^2 \sqrt{1-u''^2}}{du''^2} \right) du'' + \quad (4-74)$$

$$2RN_0 \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \frac{(2\varepsilon - \varepsilon^2)^{3/2}}{(1-\varepsilon)} + 2R \frac{2M_0}{R \tan \alpha \tan \beta} \frac{1-\varepsilon}{(2\varepsilon - \varepsilon^2)^{1/2}}$$

On introduit un nouveau paramètre adimensionnel :

$$k' = \frac{M_0}{N_0 R \tan^2 \alpha} \quad (4-75)$$

On suppose que  $k'$ ,  $\varepsilon$  et  $k'/\varepsilon$  sont petits devant 1. On peut alors effectuer un développement limité de  $P_{rm}$  ; on trouve :

$$P_{rm} \approx 4RN_0 \tan \alpha \left( \frac{k' \sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2} \varepsilon^{3/2}}{3} \right) \quad (4-76)$$

On optimise cette quantité par rapport à  $\varepsilon$ . On trouve la valeur  $\varepsilon_{opt}$  et la valeur de la puissance résistante maximale correspondante :

$$\varepsilon_{opt} = \sqrt{k'} \quad (4-77)$$

$$P_{rm} = 2RN_0 \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{8\sqrt{2}}{3} k'^{3/4} \right) \quad (4-78)$$

On voit que si  $k'$  est petit devant 1, ce qui est assuré pour les valeurs usuelles des paramètres des gabions, alors on a bien  $\varepsilon$  et  $k'/\varepsilon$  qui sont petits devant 1.

Cette optimisation approchée a été effectuée en supposant que  $H \geq 2R \tan \alpha + 2b$  et que la coque est encastrée à la base.

#### 4.4.5.4 Majoration de la nouvelle valeur de la puissance résistante maximale

Si  $2R \tan \alpha \leq H$  le nouveau calcul de la puissance résistante maximale vient d'être exécuté ci-dessus.

Il reste donc à étudier le cas où  $2R \tan \alpha \geq H$ . La puissance résistante maximale peut alors être majorée par :

$$P_{rm} \leq 2RN_0 \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \left( \int_{1-\frac{\eta}{\tan \alpha}}^1 \sqrt{1-u^2} du + \frac{8\sqrt{2}}{3} k'^{3/4} \right) \quad (4-79)$$

#### 4.4.5.5 Minoration de la nouvelle valeur de la puissance des forces extérieures

On est amené à traduire de  $b$  le champ de vitesse à l'intérieur du remblai. Si  $H > 2R \tan \alpha + b$  le nouveau calcul de la puissance des forces extérieures donne (on rappelle que l'on a choisi  $\beta = \alpha - \varphi$ ) :

$$P_e = 2\gamma HR^2 \left[ \int_{-1}^1 \left( 1 - \frac{\tan \alpha}{\eta} (1-u) \right) \sqrt{1-u^2} du \right] - \pi \gamma R^2 b \quad (4-80)$$

Dans le cas  $H < 2R \tan \alpha$ , on peut proposer une minoration de la puissance des forces extérieures. On peut utiliser le minorant approché suivant :

$$P_e \geq 2 \gamma H R^2 \left[ \frac{1}{1 - \frac{\eta}{\tan \alpha}} \int_0^1 \left( 1 - \frac{\tan \alpha}{\eta} (1-u) \right) \sqrt{1-u^2} du \right] - \pi \gamma R^2 b \quad (4-81)$$

#### 4.4.5.6 Exemple de calcul

On considère un gabion ayant les caractéristiques suivantes, en prenant pour  $M_0$  la valeur  $\sigma_0 e^2 / 4$  :

$$H=20\text{m} ; R=10\text{m} ; N_0=3000\text{kN/m} ; M_0 = 9\text{kNm/m} ; \varphi=20^\circ.$$

De ces données, on déduit la valeur de  $\eta$ . On trouve :  $\eta = 2$ . On lit sur la courbe que  $\frac{\tan \alpha}{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})} = 0,545$ . On en déduit :  $\tan \alpha = 0,778$ ,  $\alpha = 37,9^\circ$ ,  $k' = 4,96 \cdot 10^{-4}$ ,

$\varepsilon = 2,22 \cdot 10^{-2}$ . En utilisant les formules approchées, on obtient le résultat suivant :  $\gamma^+ \leq 60,5 \text{ kN/m}^3$ .

En utilisant la courbe qui ne prend pas en compte la résistance à la flexion, on trouve :  $\gamma^+ \leq 59 \text{ kN/m}^3$ . L'écart est donc d'environ 2.5% ; la correction apportée par la prise en compte de la résistance à la flexion est donc faible par rapport aux coefficients de sécurité usuels dans les ouvrages géotechniques<sup>1</sup>.

#### 4.4.5.7 Interprétation des résultats numériques sur l'influence de la résistance à la flexion

Cette correction est faible également par rapport à la correction qu'apporte la prise en compte de la résistance à la flexion dans le cas où le remblai est remplacé par un liquide exerçant une pression hydrostatique. Dans ce cas, on possède en effet la solution exacte ; on trouve pour les valeurs numériques utilisées précédemment (§4.4.5.6) et la condition à la limite utilisées ici 13,2%.

<sup>1</sup> La prise en compte du supplément de résistance à la flexion apporté par la présence des serrures peut amener à augmenter le moment résistant maximal  $M_0$  d'un facteur que nous prendrons égal à 6 pour fixer les idées. La quantité  $k'$  est donc augmentée d'autant mais intervient dans nos calculs que par ses puissances  $3/4$  et  $1/2$ . L'augmentation de l'écart entre le cas membranaire et le cas avec résistance à la flexion est au plus de  $6^{3/4} \approx 3,8$ . On obtient alors que la prise en compte de la flexion amène à majorer de moins de 9.5% le résultat du calcul effectué sans prendre en compte la résistance à la flexion.

On peut interpréter cette dernière différence (écart de 1 à 5) par le fait que l'étendue verticale de la zone en déformation dans le cas d'un liquide est déterminée

par  $H \frac{3f-1}{2f}$  avec  $f$  racine de l'équation  $\frac{M_0 R}{N_0 H^2} = \frac{1}{24} \frac{(f-1)^3}{f^2}$  (soit numériquement :

$f=1,132$ ). La hauteur de la zone en déformation est alors égale à 3,5m. Dans le cas du gabion rempli de remblai frottant, l'optimisation sans tenir compte de la résistance à la flexion, nous a conduit à considérer des champs cinématiques qui induisent des déformations dans la coque sur une hauteur de  $2R \tan \alpha$ . On trouve numériquement 15,56m.

De manière intuitive, on conçoit que pour une cinématique où la déformation est beaucoup plus répartie, l'influence relative de la résistance à la flexion est nettement plus faible. En effet, pour des profils de déformation homothétiques (on fait varier la longueur de la zone en déformation), on voit que le rapport entre la contribution à la puissance résistante maximale due à la résistance à l'effort normal et la contribution due à la résistance à la flexion est inversement proportionnel au carré de la hauteur de la zone en déformation.

Ces considérations fournissent une explication à la diminution de l'influence de la résistance à la flexion quand on passe du remblai se comportant comme un liquide ( $\varphi=0$ ) à un remblai frottant.

#### **4.4.6 Conclusions**

Nous avons appliqué la méthode de construction de champs symétrisés (§4.4.3) à partir d'un champ par blocs utilisé par (Buhan et al., 1992). Ceci permet d'améliorer très sensiblement les résultats cinématiques antérieurs (§4.4.4). On peut s'en convaincre à l'examen de la Figure 4-14 qui permet cette comparaison avec les résultats de (Buhan et al., 1992), sans toutefois prendre en compte la résistance à la flexion.

La prise en compte de la résistance à la flexion pénalise un peu les cinématiques utilisant le champ symétrisé, mais ceci n'est pas de nature à remettre en cause cette amélioration substantielle des résultats, comme le montre l'étude menée en §4.4.5.



## 4.5 Prise en compte des effets hydrauliques

### 4.5.1 Hypothèses et notations

Pour fixer les idées, on se place ici dans le cas d'un gabion isolé installé en mer pour servir de duc d'Albe. Les variations de niveau de l'eau de la mer peuvent conduire au cas défavorable où le niveau de l'eau à l'intérieur de la cellule de gabion est plus élevé que le niveau de l'eau autour. Les cinématiques envisagées seront supposées axisymétriques pour alléger certaines notations.

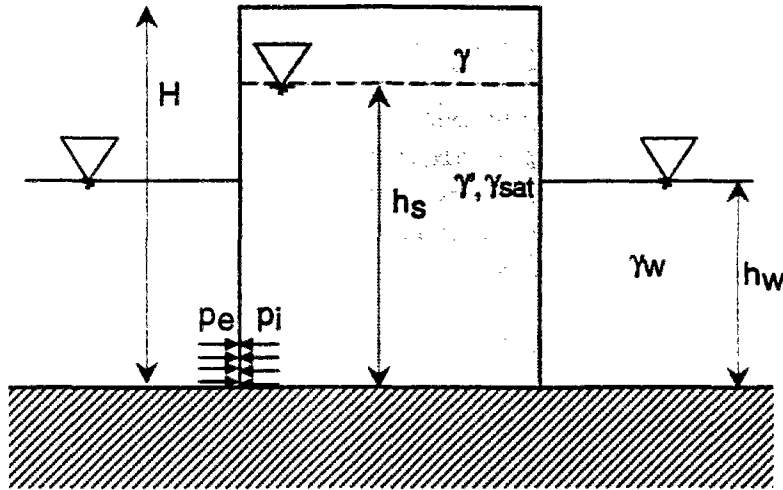


Figure 4-16 Cellule de gabion en milieu hydraulique

On introduit un certain nombre de paramètres supplémentaires par rapport à l'étude précédente où l'on n'avait pas étudié les effets dus à la présence de l'eau. Ce sont : la hauteur d'eau extérieure  $h_w$ , la hauteur de la surface libre de l'eau dans la cellule de gabion  $h_s$ , le poids volumique de l'eau  $\gamma_w$ , le poids volumique  $\gamma_{sat}$  du remblai saturé, situé en dessous de la surface libre de l'eau et le poids volumique déjaugé  $\gamma'$  égal à  $(\gamma_{sat} - \gamma_w)$ . On continue à désigner par  $\gamma$  le poids volumique du remblai au dessus de la surface libre de l'eau.

On suppose que le remblai dans sa partie au-dessous de la surface libre obéit à un critère de Coulomb en contraintes effectives. On note  $\underline{\sigma}'$  le tenseur des contraintes effectives ; on rappelle que par définition ce tenseur des contraintes effectives est égal à  $\underline{\sigma} + p\underline{1}$  où  $p$  est la pression interstitielle (les contraintes de traction sont comptées positivement).

On suppose également que l'eau est en équilibre hydrostatique à l'intérieur du gabion : l'enceinte de palplanches est supposée imperméable et il n'y a pas d'écoulement à l'intérieur de la cellule de gabion. La pression de l'eau à l'intérieur du gabion (respectivement à l'extérieur du gabion) est notée  $p_i(z)$  (respectivement  $p_e(z)$ ).

## 4.5.2 Obtention d'une condition nécessaire de stabilité

### 4.5.2.1 Rappel sur les milieux poreux

La démarche que nous allons présenter reprend la méthode développée pour l'étude des gabions dans le rapport Buhan-Dormieux-Maghous (1992). Quelle que soit la démarche retenue, il faut s'attacher à identifier clairement les forces extérieures, tant volumiques que surfaciques, à prendre en compte.

Nous allons considérer l'ensemble constitué par le remblai et l'eau qui le sature comme un unique milieu continu poreux. Pour un exposé général sur la mécanique des milieux poreux, on peut se reporter notamment à Coussy (1991).

On suppose toujours que l'enceinte de palplanches est imperméable et qu'il n'y a pas d'écoulement. La loi de Darcy s'écrit de manière générale :

$$\frac{\underline{w}}{\rho^f} = \underline{k} \cdot (-\underline{\text{grad}}(p) + \rho^f \cdot \underline{g}) \quad (4-82)$$

$\underline{w}$  désigne le vecteur courant de masse fluide,  $\underline{k}$  le tenseur de perméabilité,  $\rho^f$  la masse volumique du fluide et  $\underline{g}$  le vecteur accélération de la pesanteur. On a, bien sûr,  $\underline{\gamma}_w = \rho^f \underline{g}$ .

En l'absence d'écoulement ( $\underline{w}=0$ ) et en présence d'une perméabilité non nulle, la loi de Darcy nous donne que l'équilibre de l'eau dans la partie saturée du remblai est hydrostatique.

Écrivons l'équation de l'équilibre en un point où le remblai est saturé :

$$\text{div}(\underline{\sigma}) + \underline{\gamma}_{\text{sat}} = \text{div}(\underline{\sigma}' - p\underline{1}) + \underline{\gamma}_{\text{sat}} = 0 \quad (4-83)$$

On peut soustraire à cette équation l'équation (4-82) écrite pour  $\underline{w}=0$  :

$$-\underline{\text{grad}}p + \underline{\gamma}_w = 0 \quad (4-84)$$

On en déduit l'équation d'équilibre exprimée en contraintes effectives (avec  $\underline{\gamma}'$  le poids volumique déjaugé du remblai) :

$$\text{div}(\underline{\sigma}') + \underline{\gamma}' = 0 \quad (4-85)$$

#### 4.5.2.2 Obtention d'une condition nécessaire de stabilité pour la partie saturée du remblai

On peut dualiser cette équation d'équilibre (4-85) en effectuant le produit scalaire de cette équation par un champ de déplacement  $\underline{U}$  qu'on supposera continu pour simplifier. On intègre ensuite sur le volume constitué de la partie saturée du remblai (notée  $\Omega'$  et sa frontière étant notée  $\partial\Omega'$ ). On obtient :

$$\int_{\Omega'} \underline{\gamma}' \cdot \underline{U}(r,z) d\Omega + \int_{\partial\Omega'} \underline{U} \cdot (\underline{\sigma}' \cdot \underline{n}) ds = \int_{\Omega'} (\underline{\sigma}' : \underline{d}) d\Omega \quad (4-86)$$

On considère un matériau de remblai obéissant à un critère en contraintes effectives. Ceci est notamment le cas pour un matériau saturé constitué de grains à contacts ponctuels et de résistance infinie, la force de contact entre deux grains devant respecter un critère non affecté par la présence de l'eau (Buhan et Dormieux, 1994). On peut alors sur cette dernière équation utiliser la méthode classique conduisant à l'approche cinématique en faisant jouer au tenseur des contraintes effectives le rôle joué habituellement par le tenseur des contraintes totales.

Une condition nécessaire de stabilité pour la partie saturée du remblai s'écrit :

$$\left( \int_{\Omega'} \underline{\gamma}' \cdot \underline{U}(r,z) d\Omega + \int_{\partial\Omega'} \underline{U} \cdot (\underline{\sigma}' \cdot \underline{n}) ds \right) \leq \int_{\Omega'} \sup\{(\underline{\sigma}' : \underline{d}), \underline{\sigma}' \in G'\} d\Omega = \int_{\Omega'} \Pi(\underline{d}) d\Omega \quad (4-87)$$

Dans l'expression ci-dessus  $G'$  est le domaine de résistance exprimé en contraintes effectives et l'on note  $\Pi(\underline{d})$  la densité de puissance résistance maximale correspondante.

#### 4.5.2.3 Conditions nécessaires de stabilité pour les autres parties du système

On écrit pour les différentes autres parties du système l'inégalité de l'approche cinématique. On obtient une série d'inégalités qui sont autant de conditions nécessaires pour qu'il y ait stabilité :

$$(P_e)_i \leq (P_{rm})_i \quad (4-88)$$

On obtient une nouvelle condition nécessaire de stabilité en faisant la somme de ces inégalités pour les différentes parties du système :

$$\sum_i (P_e)_i \leq \sum_i (P_{rm})_i \quad (4-89)$$

On vient de voir précédemment quelles définitions de  $P_e$  et de  $P_{rm}$  il convient de prendre pour la partie saturée du remblai. Pour le reste du système (partie du remblai non saturée et enceinte de palplanches), la puissance des forces

extérieures et la puissance résistante maximale sont calculées suivant les principes usuels du calcul à la rupture.

On suppose de plus que les puissances surfaciques des forces extérieures sont nulles pour la limite supérieure du gabion (pas de surcharges pour simplifier) et pour la limite inférieure (on se restreint à des champs de déplacement dans le remblai tels que la vitesse à l'interface remblai/substratum soit nulle).

Les termes correspondants à la puissance de forces aux frontières communes entre différentes parties du système se simplifient deux à deux, au moins partiellement.

Ce point doit être examiné minutieusement. En ce qui concerne l'interface remblai saturé / remblai non saturé, en l'absence de discontinuité de vitesse à l'interface, il est clair que les deux termes de surface relatifs à cette interface s'annulent mutuellement car  $\underline{\sigma}' \cdot \underline{n} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  ( $p=0$  à la surface libre).

#### 4.5.2.4 Terme dû à l'interface remblai / palplanches

Considérons maintenant l'interface remblai / enceinte de palplanches. Dans le cas où il n'y a pas de discontinuité des vitesses (c'est à dire que l'on a  $\underline{U}_c(z) = \underline{U}(r, z)$  pour  $r = R$ , l'indice c signifiant coque et  $\underline{U}$  sans indice signifiant encore la vitesse du remblai), les deux termes de surface se simplifient en

$$2\pi R \int_0^{h_s} p_i w(z) dz \quad (\text{avec } w \text{ qui est la composante radiale de } \underline{U}_c).$$

Examinons maintenant le cas où il y a discontinuité de la vitesse à l'interface entre le remblai et l'enceinte de palplanches. Dans ce cas, les trois termes de surface relatifs à cette interface peuvent s'écrire de la manière suivante ( $\underline{n}$  est la normale extérieure au cylindre) :

$$2\pi R \int_0^{h_s} p_i w(z) dz + 2\pi R \int_0^{h_s} (\underline{U}(r=R, z) - \underline{U}_c(z)) \cdot (\underline{\sigma}' \cdot \underline{n}) dz + 2\pi R \int_{h_s}^H (\underline{U}(r=R, z) - \underline{U}_c(z)) \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dz \quad (4-90)$$

Les deux derniers termes de l'expression précédente peuvent être interprétés comme la puissance des efforts intérieurs de l'interface entre le remblai et l'enceinte de palplanches.

Finalement, on peut écrire l'inégalité suivante qui est une condition nécessaire de stabilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\pi R \int_0^H (p_i(z) - p_e(z)) w(z) dz + 2\pi \int_0^{h_s} \int_0^R \gamma' U_z(r, z) r dr dz + \\ + 2\pi \int_{h_s}^H \int_0^R \gamma U_z(r, z) r dr dz + 2\pi R \int_0^{h_s} (\underline{U}(r=R, z) - \underline{U}_c(z)) \cdot (\underline{\sigma}' \cdot \underline{n}) dz \\ + 2\pi R \int_{h_s}^H (\underline{U}(r=R, z) - \underline{U}_c(z)) \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dz \end{array} \right\} \leq \begin{array}{l} P_{rm} \text{ (palplanches)} \\ + P_{rm} \text{ (remblai)} \end{array} \quad (4-91)$$

On pose :

$$P_{rm} \text{ (interface remblai saturé / palplanches)} = 2\pi R \int_0^{h_s} \Pi(\underline{U}(r=R, z) - \underline{U}_c(z)) dz \quad \text{avec :} \quad (4-92)$$

$$\Pi(\underline{U}(r=R, z) - \underline{U}_c(z)) = \sup\{-(\underline{U}(r=R, z) - \underline{U}_c(z)) \cdot \underline{T}', \underline{T}' \in G'(\text{interface})\}$$

La définition ci-dessus suppose que l'on peut écrire le critère d'interface  $G'$  en vecteur contrainte effectif. Nous examinerons plus tard la possibilité d'écrire un tel critère. La puissance résistante maximale de l'interface remblai/palplanches est finalement la somme d'un terme relatif à la partie saturée du remblai (4-92) d'une part et d'un terme relatif à la partie non saturée qui s'écrit de manière classique.

En utilisant (4-92), on peut écrire une nouvelle condition nécessaire de stabilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\pi R \int_0^H (p_i(z) - p_e(z)) w(z) dz + 2\pi \int_0^{h_s} \int_0^R \gamma' U_z(r, z) r dr dz + \\ + 2\pi \int_{h_s}^H \int_0^R \gamma U_z(r, z) r dr dz \end{array} \right\} \leq \begin{array}{l} P_{rm} \text{ (palplanches)} \\ + P_{rm} \text{ (remblai)} \\ + P_{rm} \text{ (interface)} \end{array} \quad (4-93)$$

#### 4.5.2.5 Hypothèse pour que le critère d'interface puisse être écrit en contraintes effectives

Buhan et Dormieux (1994) ont montré qu'il n'était pas possible en général d'écrire le critère de résistance d'un milieu poreux en contraintes effectives. Ceci nous incite à examiner le cas de l'interface remblai / palplanche.

On peut étudier cette question du critère de résistance de l'interface dans le cadre de l'homogénéisation périodique en calcul à la rupture (Buhan, 1986). On considère une cellule de base  $A$  de l'interface palplanche / milieu poreux (= le remblai). cette interface est constituée de deux domaines : le sous-domaine  $A^f$  constitué de l'interface palplanche / partie fluide du milieu poreux et le sous-domaine  $A^s$  constitué de l'interface palplanche / partie solide du milieu poreux.

On suppose que l'interface  $A^s$  est lisse sans résistance à la traction. On va examiner à quelle condition un critère homogénéisé pourra être écrit en contrainte effective pour  $A$ .

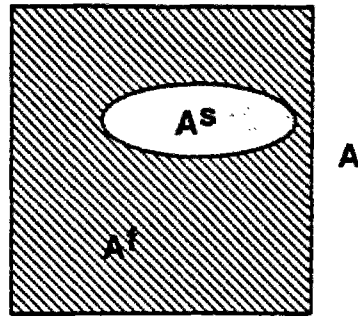


Figure 4-17 Cellule de base de l'interface palplanche/remblai

On désigne par  $\tilde{\underline{T}}$  le vecteur contrainte à l'échelle microscopique (il est égal à  $\tilde{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ ). On écrit la condition de résistance de cette interface lisse sans résistance à la traction en écrivant qu'en tout point :  $\tilde{\underline{T}} \wedge \underline{n} = 0$  et  $\tilde{\underline{T}} \cdot \underline{n} \leq 0$ .

On peut écrire :

$$\underline{T} = \frac{1}{A} \int_A \tilde{\underline{T}} dS = \frac{1}{A} \left( -p A^f \underline{n} + \int_{A^s} \tilde{\underline{T}} dS \right) \quad (4-94)$$

On introduit maintenant le tenseur des contraintes effectives :

$$\underline{T}' = \underline{T} + p \underline{n} = \frac{1}{A} \left( p A^s \underline{n} + \int_{A^s} \tilde{\underline{T}} dS \right) \quad (4-95)$$

De cette expression, on déduit les deux conditions nécessaires suivantes :

$$\underline{T}' \wedge \underline{n} = 0 \quad (4-96)$$

$$\underline{T}' \cdot \underline{n} \leq \frac{A^s}{A} p \quad (4-97)$$

Cette dernière expression n'est pas indépendante de  $p$  sauf dans le cas limite  $A^s=0$ , ce qui est le cas d'un matériau poreux formé de grains n'ayant que des contacts ponctuels avec l'interface ( $A^s \approx 0$ ).

Réciproquement, supposons que le vecteur des contraintes effectives à l'interface satisfasse les deux conditions nécessaires énoncées ci-dessus. Alors, on peut construire un champ statiquement admissible  $\tilde{\underline{T}}$ . On le définit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\underline{T}} = -p \underline{n} \text{ sur } A^f \\ \tilde{\underline{T}} = \left( \frac{A}{A^s} \underline{T}' - p \underline{n} \right) \text{ sur } A^s \end{array} \right. \quad (4-98)$$

On vérifie immédiatement que le champ  $\tilde{\underline{T}}$  est statiquement admissible pour le critère de l'interface lisse.

Il n'est donc pas possible d'écrire le critère de l'interface lisse en contraintes effectives en dehors du cas où les contacts entre l'interface et le sous-domaine solide du milieu poreux sont ponctuels.

#### 4.5.2.6 Condition nécessaire de stabilité si le critère de l'interface est lisse en contraintes effectives

On suppose maintenant que l'interface est lisse avec des contacts ponctuels entre le remblai et les palplanches.

Les mouvements pertinents pour l'interface sont ceux tels que  $w(z) \geq U(r = R, z)$  et pour ces mouvements la quantité  $2\pi R \int_0^{h_s} (U_r(r = R, z) - w(z))((\underline{\sigma}' \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}) ds$  est positive ou nulle, donc la puissance résistante maximale de l'interface est nulle pour ces champs pertinents.

Finalement , on peut écrire une nouvelle condition nécessaire de stabilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\pi R \int_0^H (p_i(z) - p_e(z)) w(z) dz + 2\pi \int_0^{h_s} \int_0^R \gamma' U_z(r, z) r dr dz + \\ \quad + 2\pi \int_{h_s}^H \int_0^R \gamma U_z(r, z) r dr dz \end{array} \right\} \leq \begin{array}{l} P_{rm} \text{ (palplanches)} \\ + P_{rm} \text{ (remblai)} \end{array} \quad (4-99)$$

Dans l'inégalité ci-dessus, les champs de vitesse doivent vérifier la condition de pertinence à l'interface palplanche / remblai. La vitesse du remblai doit être nulle à l'interface avec le substratum ou bien, si cette interface est lisse en contraintes effectives, il suffit que la vitesse du remblai soit tangente à cette interface (il faut faire la même étude que pour l'interface palplanche / remblai).

### 4.5.3 Mise en œuvre de l'approche cinématique

Il nous faut encore calculer la puissance résistante maximale. On suppose que le champ de déplacement retenu pour le remblai est pertinent pour le critère de Coulomb sans cohésion, que l'on a toujours la condition de non pénétration du remblai dans l'enceinte de palplanches qui s'écrit :

$$w(z) \geq U_r \quad (r = R, z) \quad (4-100)$$

Sous ces conditions, la puissance résistante maximale du remblai est nulle, on suppose que l'interface entre remblai et palplanches est lisse et que le champ de déplacement considéré dans le remblai est tel que la vitesse du remblai à l'interface avec le substratum est nulle ou que cette interface est lisse et qu'il n'y a pas pénétration du remblai dans le substratum. Alors la seule contribution à la puissance résistante maximale est celle due à l'enceinte de palplanches et on a :

$$P_{rm} = 2\pi R \int_0^H \frac{N_0}{R} |w(z)| + M_0 \left| \frac{d^2 w(z)}{dz^2} \right| dz \quad (4-101)$$

L'approche cinématique consiste alors à écrire la condition nécessaire de stabilité suivante pour tous les champs cinématiques vérifiant les diverses conditions énoncées ci-dessus :

$$P_e \leq P_{rm} \quad (4-102)$$

avec  $P_{rm}$  que nous venons d'évaluer (4-101) et  $P_e$  que nous avons évaluée précédemment.

A titre d'exemple, nous allons effectuer une comparaison avec des résultats de l'étude de Buhan et al (1992). Les données utilisées pour cette étude sont les suivantes :

géométrie	poids volumique	résistance
H=20m	$\gamma=16 \text{ kNm}^{-3}$	$\varphi=20^\circ$
R=10m	$\gamma'=14 \text{ kNm}^{-3}$	$N_0=3000 \text{ kNm}^{-1}$
$h_w=10\text{m}$	$\gamma_w=10 \text{ kNm}^{-3}$	

Tableau 4-2 Données pour l'étude paramétrique en fonction de  $h_s$

Nous négligerons la contribution de  $M_0$  à la puissance résistante maximale. On définit le facteur de confiance sur la résistance à la traction pour le mécanisme étudié de la manière suivante :



$$F = \frac{P_{rm}}{P_e} \quad (4-103)$$

Comme dans nos hypothèses la puissance résistante maximale est proportionnelle à la résistance à la traction  $N_0$ , on peut considérer que ce facteur de confiance porte sur cette résistance à la traction. Une valeur inférieure à 1 indique l'instabilité.

La figure ci-après donne l'évaluation de ce facteur par l'étude citée en référence et par la cinématique axisymétrique, en fonction de la hauteur d'eau  $h_s$  à l'intérieur de la cellule de gabion.

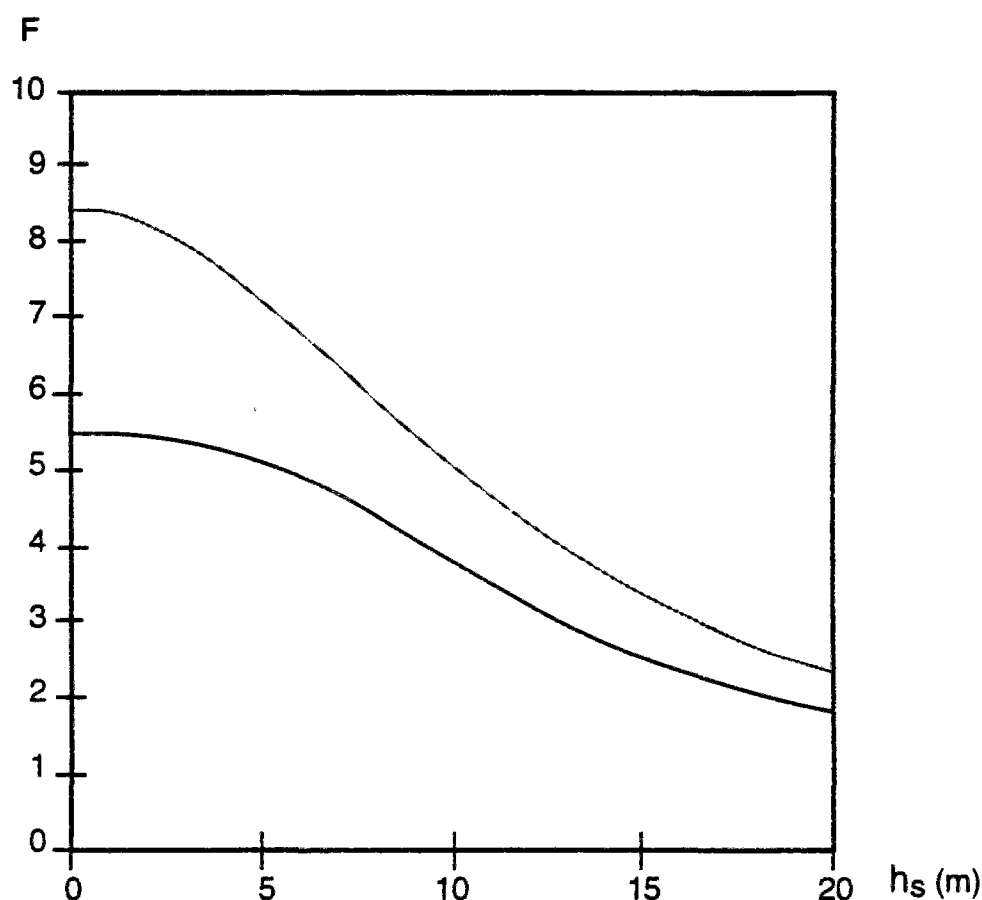


Figure 4-18 Evaluation du facteur de confiance F pour le mécanisme symétrisé (trait noir) et pour un mécanisme par blocs (trait grisé) en fonction de la hauteur d'eau à l'intérieur du gabion

#### 4.5.4 Utilisation de la méthode statique

##### 4.5.4.1 Hypothèses, choix du type de champ statique

Nous allons nous limiter à la prise en compte de la résistance des palplanches à la traction, négligeant donc la contribution de la résistance à la flexion. Les champs dans la coque seront donc choisis de type membranaire.

Dans le remblai, nous considérerons des champs de type Rankine. Nous continuons à supposer que le remblai dans sa partie saturée obéit au critère de Coulomb sans cohésion portant sur les contraintes effective. On suppose que l'angle de frottement interne  $\phi$  est le même que le remblai soit saturé et non saturé.

Sous ces conditions, la densité de force radiale s'exerçant sur la coque de palplanches s'écrit :

$$p_i(z) - p_e(z) + k(z)\sigma'_{zz}(z) \quad (4-104)$$

Dans l'expression précédente,  $k(z)$  désigne le coefficient de poussée (à la hauteur  $z$ ) qui doit être tel que  $K_p \geq k(z) \geq K_a$ .

#### 4.5.4.2 Obtention d'une condition suffisante

Écrivons les valeurs des diverses quantités apparaissant dans la formule (4-104) :

$$p_i(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \geq h_s \\ \gamma_w(h_s - z) & \text{si } z \leq h_s \end{cases} \quad (4-105)$$

$$p_e(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \geq h_w \\ \gamma_w(h_w - z) & \text{si } z \leq h_w \end{cases} \quad (4-106)$$

$$\sigma'_{zz} = \begin{cases} \gamma(H - z) & \text{pour } z \geq h_s \\ \gamma'(h_s - z) + \gamma(H - h_s) & \text{pour } z \leq h_s \end{cases} \quad (4-107)$$

Ces diverses quantités sont représentées sur la figure suivante.

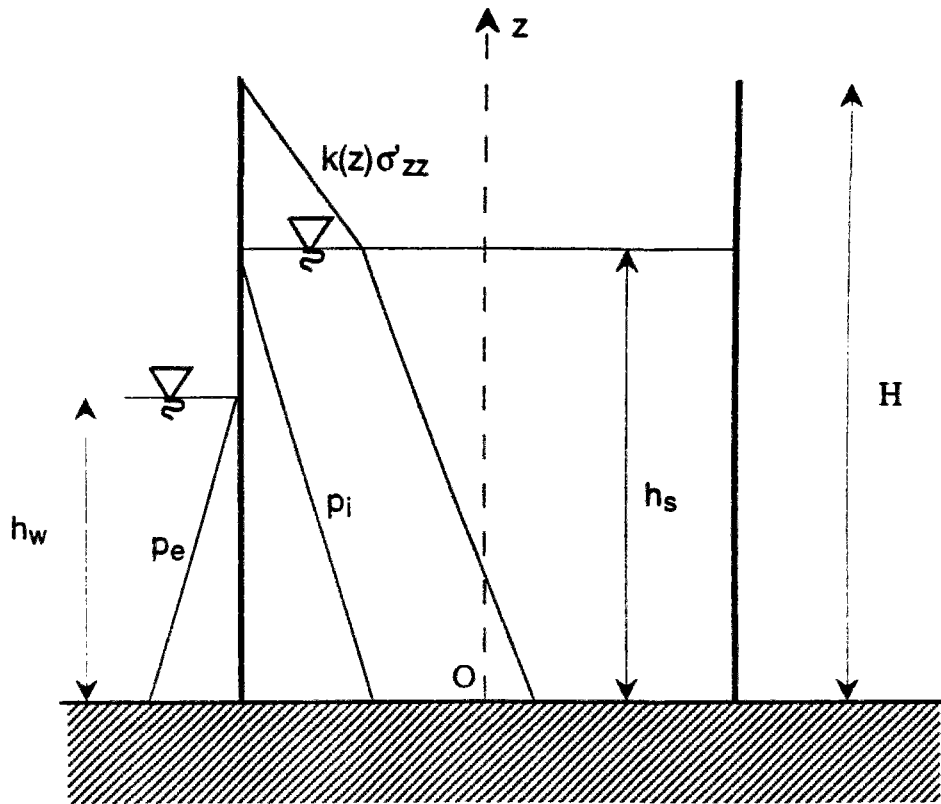


Figure 4-19 Forces radiales sur l'enceinte de palplanches

Il faut donc pouvoir trouver  $k(z)$  compris toujours entre  $K_a$  et  $K_p$  tel que :

$$-N_0 / R \leq p_i(z) - p_e(z) + k(z)\sigma'_{zz}(z) \leq N_0 / R \quad (4-108)$$

Dans le cas où  $h_w > h_s$ , on a  $p_i - p_e < 0$ , et on pourrait éventuellement se poser la question de vérifier la condition de gauche. Pratiquement, compte tenu des valeurs des poids volumiques et des angles de frottement, on peut toujours choisir  $k(z)$  tel que  $p_i(z) - p_e(z) + k(z)\sigma'_{zz}(z) \geq 0$ . Il reste donc à vérifier l'inégalité de droite. On voit que la condition la plus restrictive sera atteinte à la base ( $z=0$ ) et s'écrit finalement :

$$\gamma_w(h_s - h_w) + K_a(\gamma(H - h_s) + \gamma'h_s) \leq N_0 / R \quad (4-109)$$

Si la condition précédente est satisfaite, le chargement est potentiellement supportable.

#### 4.5.4.3 Étude paramétrique

Nous allons procéder à une étude paramétrique en fonction de  $h_s$  en utilisant les données numériques du Tableau 4-2. En utilisant la formule (4-109), on définit le coefficient  $F'$  de la manière suivante :

$$F' = \frac{N_0/R}{\gamma_w(h_s - h_w) + K_a(\gamma(H - h_s) + \gamma h_s)} \quad (4-110)$$

Si  $F' \geq 1$ , la stabilité est (potentiellement) assurée. Compte tenu des valeurs numériques des paramètres, on obtient l'expression suivante :

$$F' = \frac{300}{56,8 + 9,02h_s} \text{ avec } h_s \text{ en m} \quad (4-111)$$

Le tracé simultané de  $F$  pour une cinématique et de  $F'$  permet une comparaison (Figure 4-20).

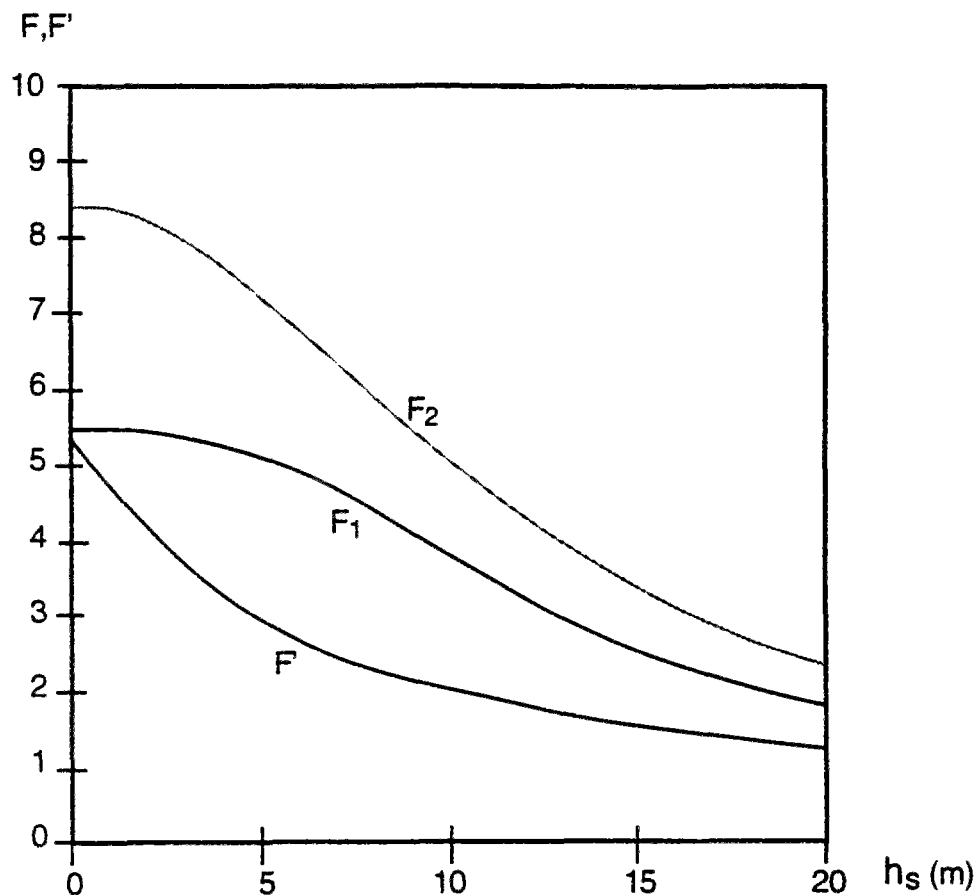


Figure 4-20 Tracé de  $F_1$  (cinématique axisymétrique) de  $F_2$  (cinématique par blocs) et de  $F'$  (statique) en fonction de la hauteur d'eau dans le gabion

La figure ci-dessus permet de voir l'apport que représente l'utilisation de la cinématique axisymétrique (étudiée au §4.4.4) par rapport à la cinématique par blocs. Pour  $h_s$  voisin de 0, la statique et la cinématique par blocs donnent même des résultats très proches, mais malheureusement c'est la situation la moins critique. Pour la situation la plus critique ( $h_s=20\text{m}$ ), on a  $F_1/F' \approx 1,43$ .

## 4.6 Etude cinématique sous moment de renversement

### 4.6.1 Rappel des travaux antérieurs

La résistance à un moment de renversement (en étudiant la résistance au cisaillement interne du remblai) est une des conditions à vérifier dans les méthodes de dimensionnement des ouvrages en gabions (voir §1.5). La première de ces méthodes semble être celle de Terzaghi (1945). Cet auteur donne la valeur suivante pour le moment maximal (par unité de longueur) par rapport à la base de la gabionnade (pour un système de forces horizontales) :

$$\frac{1}{3} \gamma b H^2 \left( K \tan \varphi + K f \frac{R}{L} \right) \quad \text{avec} \quad K = \frac{\cos^2 \varphi}{2 - \cos^2 \varphi} \quad (4-112)$$

La largeur  $b$  est la largeur équivalente,  $\varphi$  est l'angle de frottement interne du remblai. Le coefficient  $f$  est le coefficient de frottement des serrures des palplanches. Nous avons (§1.5.7) présenté une analyse de la méthode utilisée pour arriver au résultat ci-dessus. Celle-ci est basée sur l'équivalence avec un double rideau (Figure 4.21). D'autres estimations du moment maximal sont également utilisées (§1.5.7).

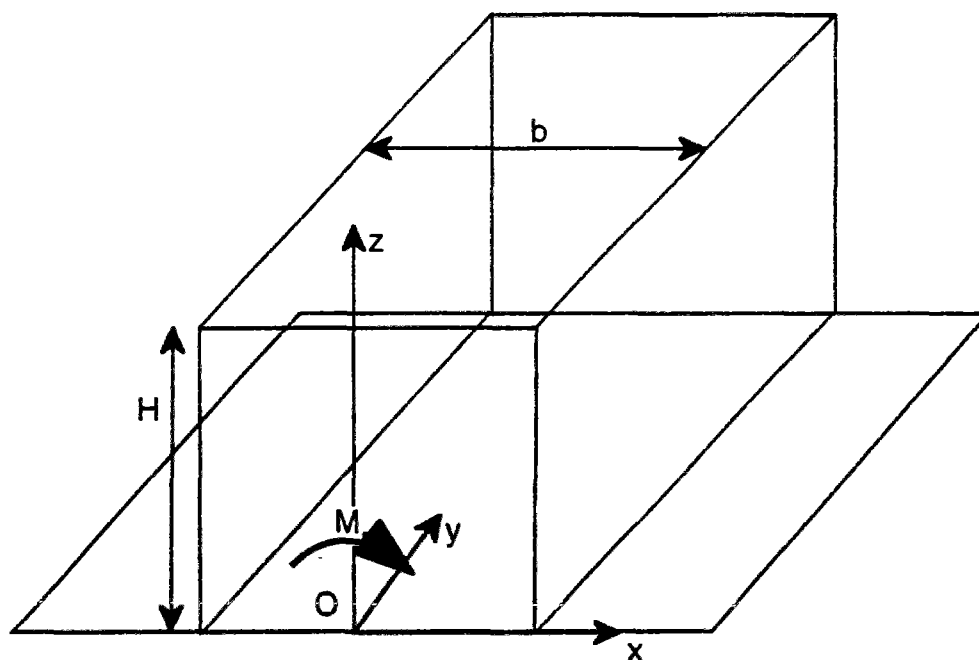


Figure 4-21 Double rideau modélisant une gabionnade soumise à un moment de renversement

Ce type de mécanisme de rupture a été utilisé dans le cadre du calcul à la rupture par Lochmann (1988). Mais le champ cinématique utilisé n'était pas pertinent pour le critère de Coulomb. Un critère de Tresca était donc utilisé. De même, le frottement entre les serrures des palplanches était remplacé par la

donnée d'un effort maximal vertical entre deux palplanches voisines. D'autre part, la prise en compte individuelle des palplanches (au lieu de considérer une coque homogène) compliquait fortement les calculs.

#### 4.6.2 Choix d'un champ cinématique

Nous allons reprendre en calcul à la rupture la même problématique. Mais nous allons considérer directement la géométrie réelle de la cellule de gabion (Figure 4-22).

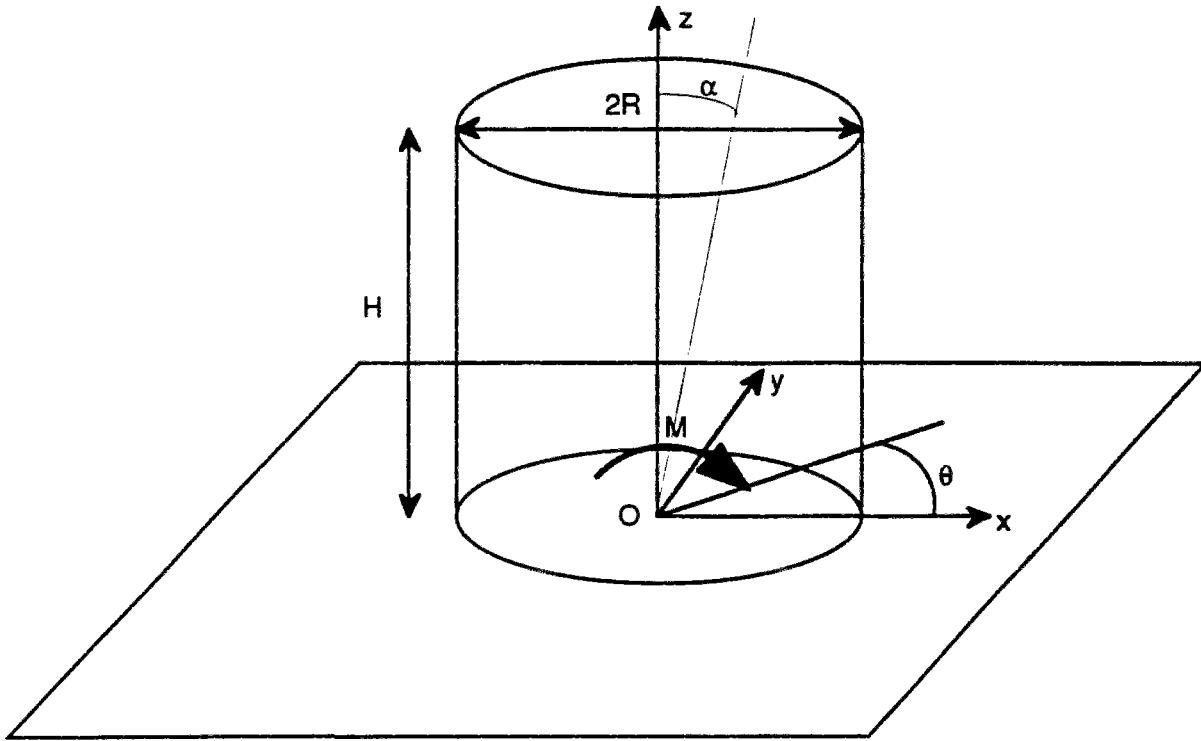


Figure 4-22 Gabion soumis à un moment de renversement

Le moment  $M$  est créé par un système de forces horizontales ayant toutes comme direction  $Ox$ . Nous choisirons une cinématique telle que la puissance de ce système de forces puisse s'écrire sous la forme  $\alpha M$  avec  $M$  le moment du système de force par rapport à  $Oy$  et  $\alpha$  un angle de rotation qui va caractériser notre cinématique.

On choisit de considérer pour le remblai un champ de vitesse de la forme suivante :

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \\ 0 \\ f(z) \end{pmatrix} \quad (4-113)$$

Le champ de déformation correspondant s'écrit :

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha/2 & 0 & f'(z) \end{pmatrix} \quad (4-114)$$

La condition de pertinence pour le critère de Coulomb s'écrit :

$$\text{tr}(\underline{d}) = f'(z) \geq \sin \varphi (|d_1| + |d_2| + |d_3|) = \sin \varphi \sqrt{f'^2(z) + \alpha^2} \quad (4-115)$$

Une condition suffisante pour que l'inégalité précédente soit satisfaite est :

$$f'(z) \geq \tan(\varphi) |\alpha| \quad (4-116)$$

Une optimisation évidente conduit à minimiser le travail du poids du remblai et donc à choisir  $f(z)$  le plus petit possible. En définitive, on retient le champ suivant :

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \\ 0 \\ \alpha \tan(\varphi) z \end{pmatrix} \quad (4-117)$$

#### 4.6.3 Obtention d'une condition nécessaire

Avec le champ de vitesse que nous avons choisi tant dans le remblai que dans la coque, on voit que la puissance du système de forces horizontales considéré peut effectivement s'écrire  $\alpha M$ . On peut maintenant évaluer le travail de l'ensemble des forces extérieures :

$$P_e = \alpha \left( M - \frac{1}{2} \gamma \pi R^2 H^2 \tan(\varphi) \right) \quad (4-118)$$

Il reste maintenant à calculer la puissance résistante maximale de la coque. Il faut d'abord calculer la puissance des efforts intérieurs dans le mouvement virtuel considéré. Exprimons la vitesse du remblai (4-117) dans des coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \\ U_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \cos \theta \\ \alpha z \sin \theta \\ \alpha z \tan \varphi \end{pmatrix} \quad (4-119)$$

## Étude cinématique du gabion isolé

On suppose l'interface lisse et qu'il n'y a pas de vitesse verticale des points de la coque. On choisit alors pour la coque le champ de vitesse suivant :

$$\begin{pmatrix} w \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \cos \theta \\ \alpha z \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4-120)$$

On peut maintenant écrire la puissance des efforts intérieurs de la coque (en en choisissant les vitesses de rotation de la coque qui vérifient la condition de Kirchhoff-Love) :

$$P_i = R \int_0^H dz \int_{-\pi}^{\pi} N_{\theta z} \frac{\partial U_\theta}{\partial z} d\theta \quad (4-121)$$

On a vu que l'on pouvait retenir comme critère sur  $N_{\theta z}$  :  $|N_{\theta z}| \leq f |N_{\theta\theta}|$  où  $f$  est le coefficient de frottement des serrures des palplanches. Compte tenu de la forme de la puissance des efforts intérieurs pour le type de champ que nous étudions et compte tenu du critère  $|N_{\theta\theta}| \leq N_0$ , on déduit que la densité de puissance résistante maximale dans notre cas est la suivante :

$$\Pi = f N_0 \left| \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right| \quad (4-122)$$

Par intégration, en prenant en compte la valeur de  $U_\theta$ , on obtient la puissance résistante maximale :

$$P_{rm} = 4\alpha R H f N_0 \quad (4-123)$$

En combinant les résultats (4-118) et (4-123), on obtient la condition nécessaire suivante :

$$\boxed{M \leq \frac{1}{2} \gamma \pi R^2 H^2 \tan(\varphi) + 4 R H f N_0} \quad (4-124)$$

Ce résultat peut être facilement complété pour le cas où une partie du remblai est saturée (pour  $z \leq h_s$ ). Il convient alors de remplacer  $\gamma$  par  $\gamma_e$  défini par :

$$\gamma_e = \frac{2}{H^2} \left( \int_0^{h_s} \gamma' z dz + \int_{h_s}^H \gamma z dz \right) \quad (4-125)$$

La comparaison de (4-124) avec des travaux antérieurs théoriques et expérimentaux sera effectuée dans le chapitre 7.



## 4.7 Récapitulatif

Rappelons tout d'abord les diverses cinématiques que nous avons construites ou que nous avons utilisées pour effectuer des comparaisons.

type de champ cinématique utilisé	chargement	interface remblai/ substratum	remarques
champ homogène (Dormieux et Delaurens)	poids propre	lisse	
champ par blocs (Buhan et al., 1992)	poids propre du remblai et de l'eau	frottant	
symétrisation du champ par blocs utilisé dans (Buhan et al., 1992)	poids propre du remblai (§4.3) et de l'eau (§4.5)	frottant	deux variantes suivant la condition $\eta \geq 2R \tan(\alpha)$
symétrisation d'un champ par blocs (§4.4.1)	poids propre du remblai	lisse	deux variantes suivant la condition $\eta \geq R \tan(\alpha)$
solution d'une équation aux dérivées partielles (§4.4.2)	poids propre du remblai	lisse	
champ de déformation (§4.6)	poids propre du remblai et moment de renversement	frottante	

Tableau 4-3 Récapitulatif des cinématiques utilisées pour la stabilité de la cellule de gabion isolée remplie de remblai frottant sous poids propre

Nous avons étudié la stabilité sous poids propre de la cellule de gabion isolée remblai de remblai frottant sous propre pour deux cas différents d'interface remblai/substratum : interface lisse ou interface frottante.

Dans le cas de l'interface lisse, nos résultats peuvent être comparés à ceux de (Dormieux et Delaurens, 1991). L'amélioration par rapport à ces résultats antérieurs dépend de l'angle de frottement interne et de l'élancement de la cellule mais est très sensible (Figure 4-4) notamment pour les valeurs usuelles de ces paramètres ( $\phi$  autour de  $30^\circ$ ,  $\eta$  de l'ordre de 2).

Dans le cas de l'interface remblai/substratum frottante, les résultats antérieurs servant de comparaison sont ceux issus de (Buhan et al., 1992). L'amélioration apportée par l'utilisation de champs symétrisés est également

## Étude cinématique du gabion isolé

notable y compris pour les valeurs usuelles des paramètres d'angle de frottement interne et d'élanement. Notons également que la cinématique que nous avons construite dans ce cas peut à son tour servir de base à la construction d'une solution exacte pour certaines valeurs des paramètres (voir annexe C).

La comparaison des résultats obtenus pour l'interface lisse d'une part et pour l'interface frottante d'autre part, met en évidence l'influence du frottement entre le remblai et le substratum (Figure 4-23).

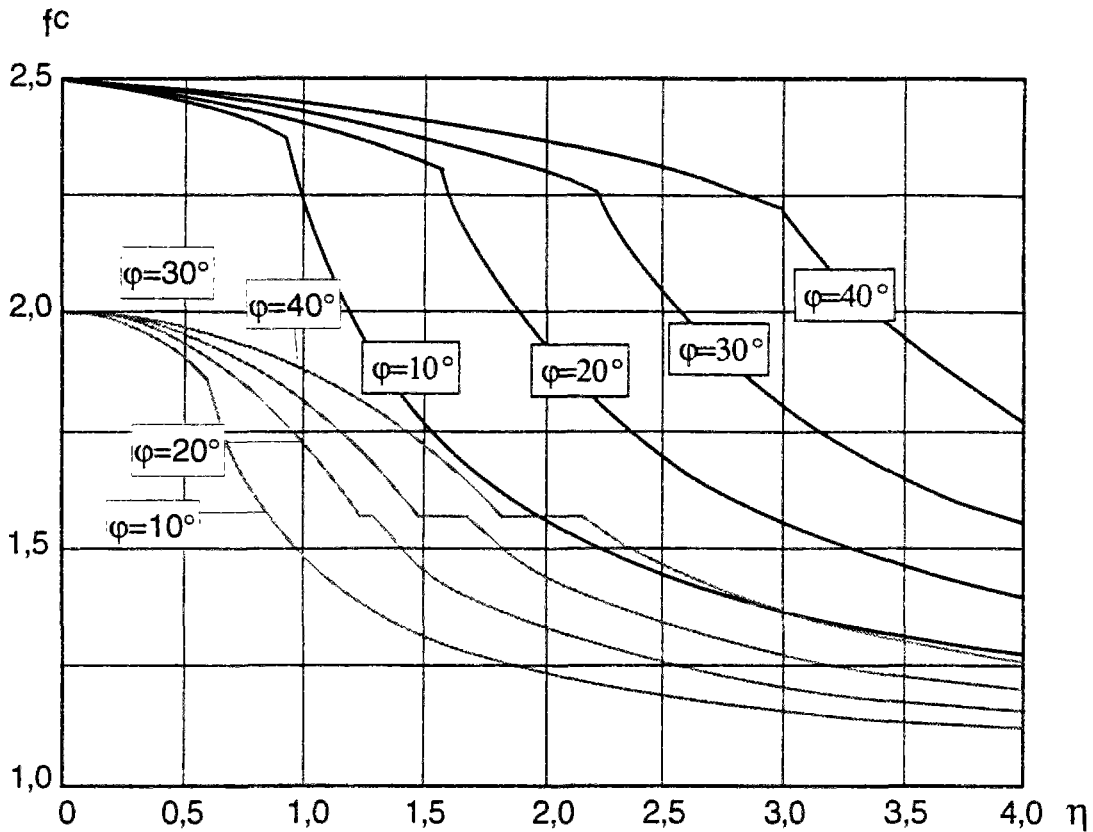


Figure 4-23 Comparaison des résultats obtenus dans le cas de l'interface remblai/substratum lisse (courbes grisées) et de l'interface frottante (courbes noires)

L'influence de l'eau a été prise en compte dans le cas de l'interface remblai/substratum frottante, ce qui a permis la comparaison avec les résultats de (Buhan et al., 1992). L'utilisation de notre cinématique permet dans ce cas également une amélioration substantielle par rapport aux résultats antérieurs (Figure 4-20).

Enfin la cinématique étudiée dans le cas d'une cellule soumise à un moment devrait plutôt être comparée avec des résultats fournis par la méthode de Brinch-Hansen, ce qui sera fait au chapitre 7. Notons que cette cinématique présente l'avantage de fournir un résultat sous une forme analytique très simple.



## 5. Étude statique de la gabionnade

*Nous allons maintenant aborder l'étude de la gabionnade avec sa géométrie réelle, à la différence des méthodes classiques de dimensionnement qui utilisent l'analogie avec le double rideau. Dans ce chapitre, nous utiliserons la méthode statique du calcul à la rupture, le chapitre suivant étant consacré à l'application de la méthode cinématique. Nous rappellerons d'abord (§5.1) les travaux antérieurs et nous indiquerons le type général de champs statiques que nous utiliserons ainsi que l'utilisation des symétries du problème.*

*Ensuite, nous rechercherons des solutions statiques où l'équilibre de l'enceinte de palplanches se ramène à l'équilibre d'une série d'arcs constituant une « tranche » horizontale de gabionnade. Nous envisagerons deux cas :*

- équilibre dans la configuration initiale (§5.2),*
- équilibre dans une configuration déformée avec un équilibre membranaire (§5.3).*

*Enfin, nous étudierons pour certaines configurations, la possibilité de prendre en compte la résistance à la flexion longitudinale pour améliorer les bornes statiques obtenues précédemment (§5.4). Ceci permettra d'étendre à certains cas de statiques de la gabionnade les résultats obtenus précédemment pour la cellule isolée.*

### 5.1. Introduction

#### 5.1.1. Travaux antérieurs

Il faut citer principalement l'article de Mark P. Rossow (1984) portant sur l'étude de l'équilibre membranaire en configuration déformée de gabions cellulaires soumis à des pressions internes. Il se ramène, comme nous le ferons également, à l'étude d'une portion de gabionnade réduite en plan horizontal grâce à l'utilisation des symétries. L'étude de cette portion est ensuite restreinte à celle d'une « tranche » horizontale comme nous le ferons en 5.2 et 5.3.

La différence majeure dans la manière d'appréhender le problème est que Rossow considère comme connues les diverses pressions exercées par le remblai sur les différentes parties de la gabionnade, alors que nous allons utiliser le calcul à la rupture en prenant comme système l'ensemble de la coque de palplanches et du remblai.

Nous situerons plus précisément dans la suite nos travaux par rapport à ceux de Rossow.

### 5.1.2. Configuration géométrique

On rappelle tout d'abord l'allure d'une gabionnade constituée de gabions cellulaires. La figure ci-dessous montre la vue de dessus d'une telle gabionnade. Les cellules principales sont des cylindres d'axes verticaux; les cellules de raccordement sont limitées par des morceaux de cylindre. Le plan vertical comprenant les axes de symétrie des cellules principales est un plan de symétrie.

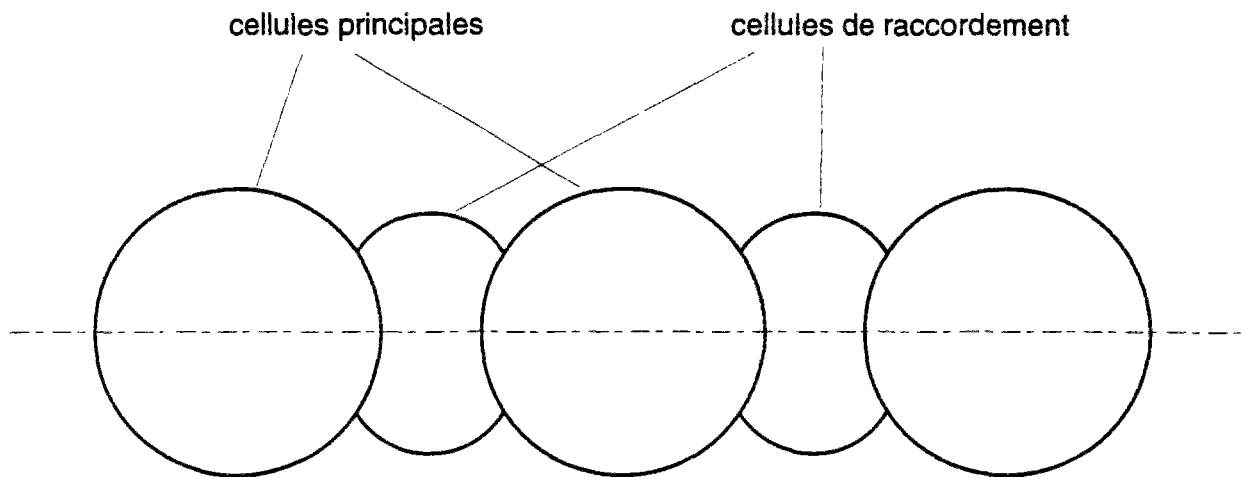


Figure 5-1 Vue schématique du dessus d'une gabionnade

### 5.1.3. Choix d'une classe de champs statiquement admissibles

Pour l'étude statique par l'intérieur, on peut se limiter à des classes de champs statiquement admissibles judicieusement choisies.

Pour le remblai, on considérera des champs statiquement admissibles tels que le plan horizontal soit un « plan principal » du tenseur des contraintes (toutes les directions de ce plan sont principales et les valeurs principales associées sont toutes égales). Désignons par Oz l'axe vertical orienté vers le haut, l'origine O étant située à la surface du remblai. Les composantes du tenseur des contraintes sont alors de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = f(z) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \\ \sigma_{zz} = \gamma z \end{array} \right. \quad (5-1)$$

Un tel champ de contraintes exerce sur l'enceinte de palplanches une pression  $f(z)$ . La fonction  $f(z)$  doit être choisie en fonction du critère de résistance du remblai. Dans le cas d'un matériau de Coulomb sans résistance à la traction le choix optimum

est  $f(z) = K_a \gamma z$  (champ de Rankine). Ce choix satisfait le critère de résistance du matériau constitutif du remblai tout en minimisant la pression à laquelle est soumise l'enceinte de palplanches.

Nous allons également préciser les champs de contraintes que nous envisagerons pour la coque constituée de palplanches. A priori, ce champ de contraintes généralisées est défini par les tenseurs  $\underline{M}$  (moments fléchissants),  $\underline{N}$  (efforts normaux) et  $\underline{V}$  (efforts tranchants). On utilise un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  adapté pour chaque portion cylindrique de coque. Pour simplifier, nous supposerons pour commencer (jusqu'en 5.4) que  $M_{zz}$  est nul. Dans le cas du gabion isolé, il a été possible de préciser l'influence de la résistance de l'enceinte de palplanches à la composante  $M_{zz}$  du moment fléchissant. On se restreindra également au cas où  $M_{\theta z}$  et  $N_{\theta z}$  sont nuls. Comme les efforts extérieurs se limitent à une pression, on déduit de cette dernière hypothèse, des équations de l'équilibre et des conditions aux limites au bord supérieur (qui est libre) que  $N_{zz}$  est nul lui aussi. Il en est de même pour  $V_z$ .

Finalement, les équations d'équilibre pour les coques constituant les enceintes des différentes cellules peuvent s'écrire, compte tenu des différentes hypothèses faites, en notant  $p(z)=f(z)$  la pression interne exercée par le remblai :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + V_\theta = 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + V_\theta = 0 \\ \frac{N_{\theta\theta}}{R} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = p \end{cases} \quad (5-2)$$

On reconnaît là **les équations d'équilibre d'un arc circulaire plan**, chargé dans son plan par une force normale répartie. Les choix particuliers que nous avons faits pour les champs de contraintes nous permettent donc de passer d'un problème de coque à un problème d'arc. Nous avons pu nous ramener à l'étude de l'équilibre et de la résistance d'arcs qui sont des tranches horizontales de la gabionnade. Dans la suite, nous désignerons  $N_{\theta\theta}$  par  $N$ ,  $M_{\theta\theta}$  par  $M$  et  $V_\theta$  par  $V$ .

### 5.1.4. Utilisation des symétries

L'utilisation des symétries va permettre de réduire la partie de la gabionnade à étudier.

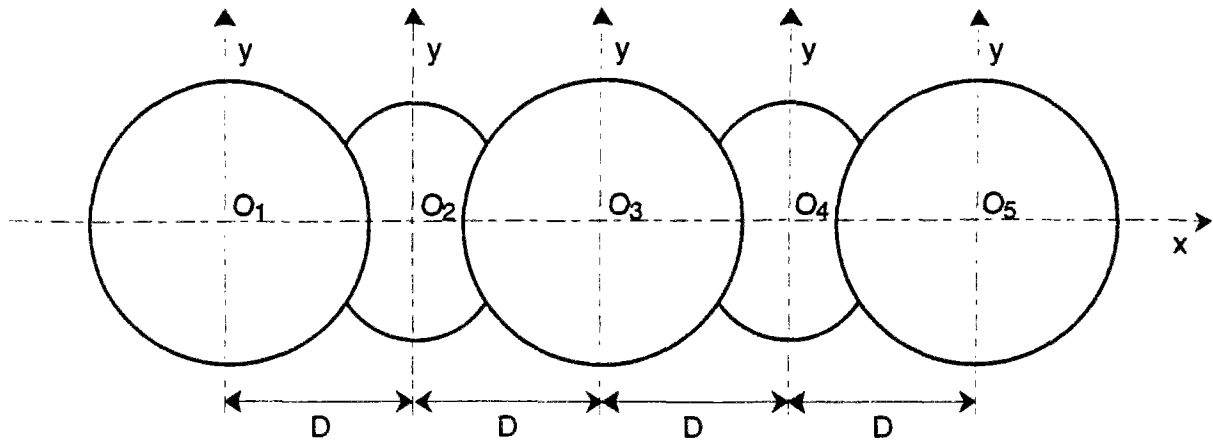


Figure 5-2 Symétries d'une gabionnade

On suppose que la longueur de la gabionnade est infinie ; alors cette gabionnade est invariante par translation de vecteur de direction  $Ox$  et de longueur  $2D$ . Le plan de trace  $Ox$  est un plan de symétrie ; les plans de trace  $O_iy$  sont aussi des plans de symétrie. L'invariance par translation permet de se limiter à la partie comprise entre les plans de trace  $O_1y$  et  $O_3y$ . La symétrie par rapport au plan de trace  $O_2y$  permet de se restreindre à la partie comprise entre les plans de trace  $O_1y$  et  $O_2y$ . Enfin, la symétrie par rapport au plan  $Ox$  permet de n'étudier que la partie comprise entre  $O_1y$  et  $O_2y$  située "au dessus" de  $Ox$ .

En définitive, la partie de la gabionnade à considérer a la trace suivante dans le plan  $Oxy$  :

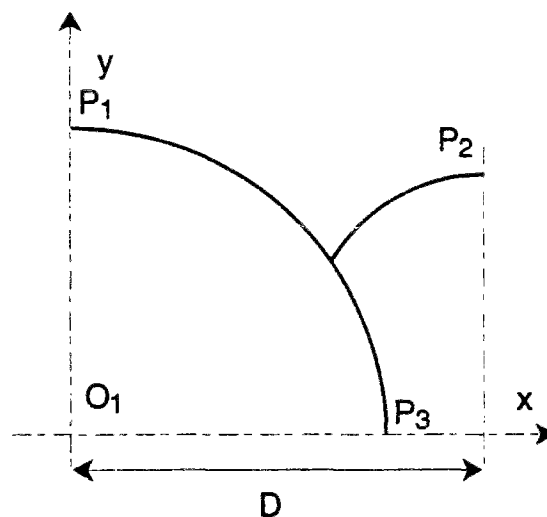


Figure 5-3 Cellule élémentaire de gabionnade

L'utilisation des symétries va permettre de préciser les conditions aux limites aux points  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ . Prenons par exemple le point  $P_1$ . Imaginons une coupure par le plan  $O_1y$ . Les forces exercées le long de cette coupure par la partie gauche de l'enceinte de palplanches (non figurée) sur la partie de droite ont pour composante selon  $x$ ,  $-N_{\theta\theta}$ , selon  $y$ ,  $-V_{\theta}$  (selon  $z$  la composante est nulle puisque  $N_{\theta z}$  est nul). La symétrie par rapport au plan de trace  $O_1y$  permet de conclure que la composante selon  $y$  est nulle. La même symétrie permet de conclure que le point  $P_1$  ne peut pas se déplacer dans la direction  $Ox$ , si l'on se restreint, comme cela est possible, à des cinématiques ayant la même symétrie que le problème.

On peut donc schématiser de la manière suivante, le fonctionnement mécanique des arcs, tranches horizontales de la gabionnade :

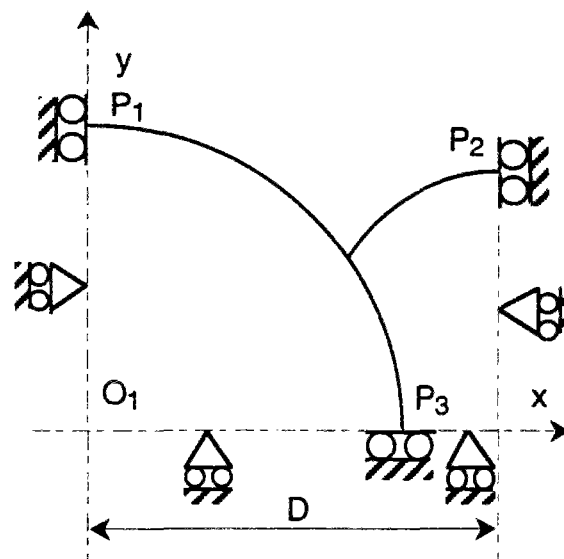


Figure 5-4 Conditions aux limites d'une cellule élémentaire



## 5.2. Équilibre dans la configuration initiale

### 5.2.1. Équation d'équilibre d'un arc circulaire chargé dans son plan

Pour simplifier, comme on se ramène à l'étude d'une tranche horizontale, nous allons utiliser les notations correspondant à l'étude d'un arc et non plus d'une coque.

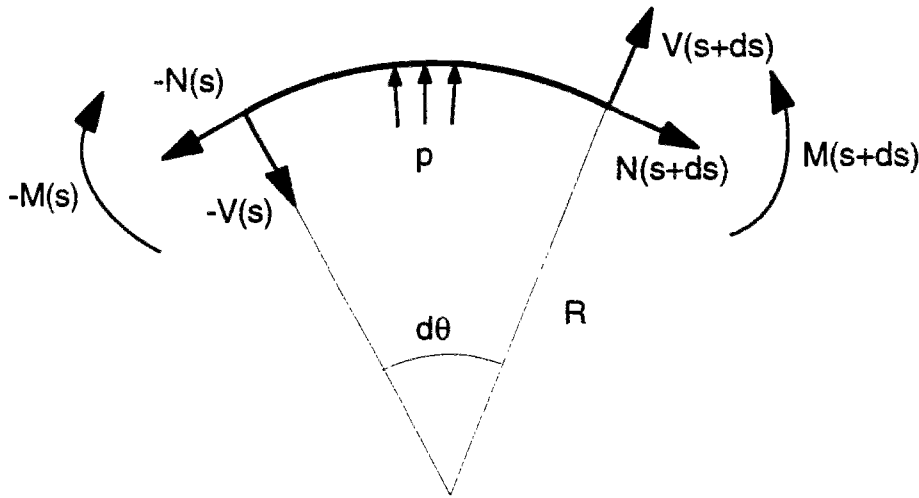


Figure 5-5 Équilibre d'un élément d'arc

On retrouve les équations d'équilibre en écrivant l'équilibre d'un morceau d'arc de longueur infinitésimale  $ds$ . L'équilibre des moments au centre de courbure donne :  $M(s+ds) - M(s) - R N(s+ds) + R N(s) = 0$  ; on en déduit :

$$M - RN = \text{Constante} \quad (5-3)$$

L'équilibre des forces dans la direction tangente donne :  $N(s+ds) - N(s) + V/R = 0$ . On en déduit :

$$\frac{dN}{ds} + \frac{V}{R} = 0 \quad (5-4)$$

L'équilibre des forces dans la direction normale à l'arc donne :  $p ds + V(s+ds) - V(s) - N ds / R = 0$  ; on en déduit :

$$\frac{N}{R} - \frac{dV}{ds} - p = 0 \quad (5-5)$$

La combinaison des relations ( 5-4) et ( 5-5) donne  $\frac{d^2N}{ds^2} + \frac{N}{R} = p$  ; on en déduit dans le cas d'un arc circulaire :

$$\frac{d^2N}{d\theta^2} + N = R p \quad ( 5-6)$$

En intégrant cette équation différentielle, on obtient :

$$N = A \cos \theta + B \sin \theta + R p \quad ( 5-7)$$

Les quantités A et B sont des constantes d'intégration qui restent à déterminer. En remplaçant la valeur de N obtenue dans ( 5-7) dans les équations ( 5-3) et ( 5-4), on obtient :

$$V = A \sin \theta - B \cos \theta \quad ( 5-8)$$

$$M = R(A \cos \theta + B \sin \theta + C) \quad ( 5-9)$$

La quantité C est une autre constante d'intégration.

### 5.2.2. Description de la géométrie initiale d'une portion élémentaire de gabionnade

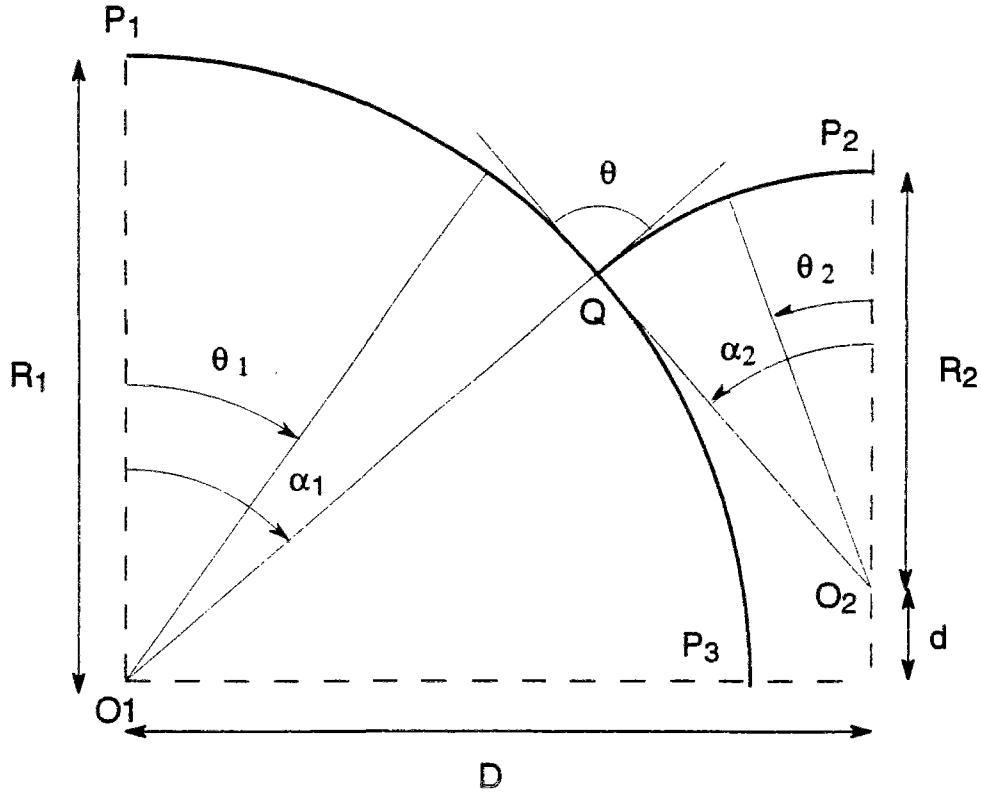


Figure 5-6 Paramètres géométriques d'une cellule élémentaire

Nous avons fait figurer sur la figure ci-dessus sept paramètres géométriques :  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $D$ ,  $d$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\theta$ . En fait, il n'y a que quatre paramètres géométriques indépendants. On voit en effet qu'il y a trois relations :

$$\theta = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (5-10)$$

$$R_1 \cos \alpha_1 = R_2 \cos \alpha_2 + d \quad (5-11)$$

$$D = R_1 \sin \alpha_1 + R_2 \sin \alpha_2 \quad (5-12)$$

Nous allons utiliser comme paramètres géométriques les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  et les longueurs  $R_1$  et  $R_2$ . Recherchons quelles sont les valeurs admissibles de ces paramètres.

Il faut vérifier que la géométrie définie est compatible avec les symétries que l'on a supposées et qu'elle ne conduit pas non plus à l'interpénétration de différentes parties de l'enceinte de palplanches.

D'abord, il faut que l'angle  $\alpha_1$  soit compris entre 0 et  $\pi/2$  ; une valeur supérieure ne serait pas compatible avec la symétrie par rapport à la droite  $O_1P_3$  . Notons que l'angle  $\alpha_2$  n'a pas cette même contrainte et peut, en théorie, prendre toute valeur comprise strictement entre 0 et  $\pi$ .

Pour éviter l'interpénétration de l'arc de raccordement avec la cellule principale, il faut que l'angle  $\theta$  soit positif. On a la relation géométrique :

$$\theta = \pi - \alpha_1 - \alpha_2 \quad (5-13)$$

On en déduit la condition  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$  . Pour éviter l'interpénétration de l'arc principal avec l'arc principal voisin, il faut  $D \geq R_1$  . Cette condition peut s'exprimer grâce à ( 5-12) avec les quatre paramètres géométriques que nous avons choisis.

### 5.2.3. Équilibre du système de trois arcs

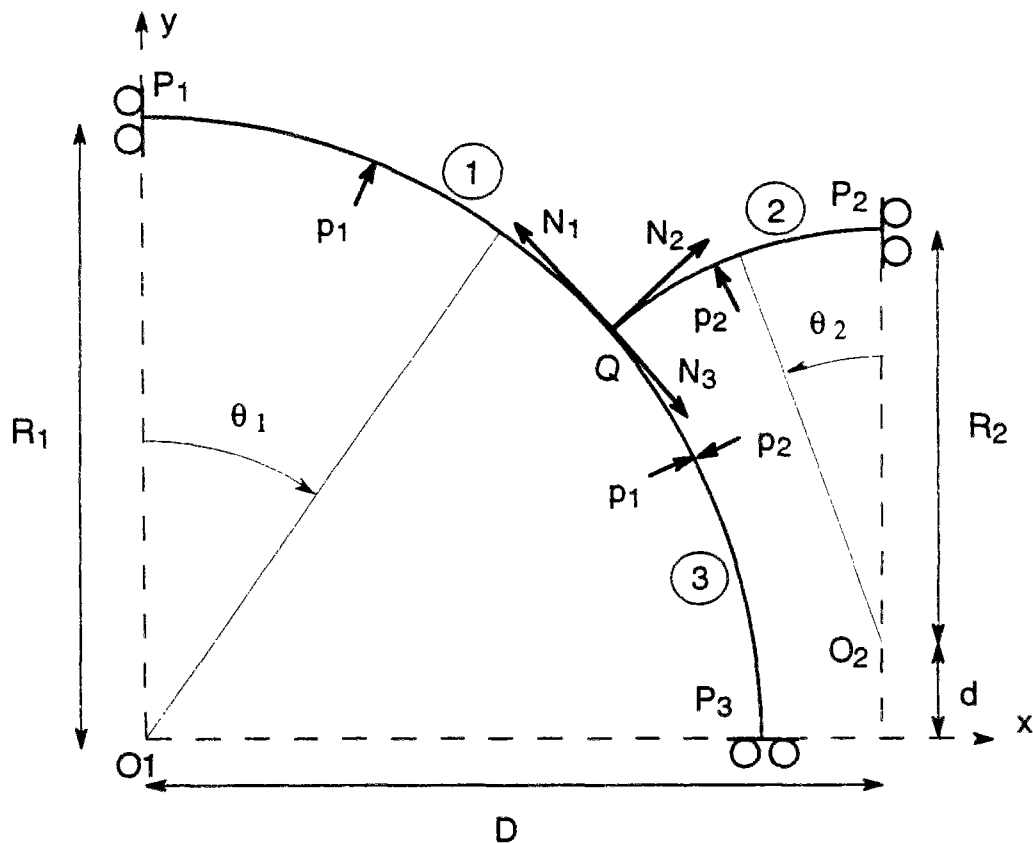


Figure 5-7 Équilibre d'une cellule élémentaire

On affecte l'indice 1 au tronçon  $P_1Q$ , l'indice 2 au tronçon  $P_2Q$ , l'indice 3 au tronçon  $QP_3$  . Ceux-ci sont respectivement soumis à une pression interne  $p_1, p_2, (p_1-p_2)$ .

## Chapitre 5

On peut utiliser pour chaque tronçon les relations ( 5-7), ( 5-8) et ( 5-9). Ecrivons pour commencer les relations ( 5-7) et ( 5-8) :

$$\begin{cases} N_1 = A_1 \cos \theta_1 + B_1 \sin \theta_1 + R_1 p_1 \\ N_2 = A_2 \cos \theta_2 + B_2 \sin \theta_2 + R_2 p_2 \\ N_3 = A_3 \cos \theta_1 + B_3 \sin \theta_1 + R_1(p_1 - p_2) \end{cases} \quad (5-14)$$

$$\begin{cases} V_1 = A_1 \sin \theta_1 - B_1 \cos \theta_1 \\ V_2 = A_2 \sin \theta_2 - B_2 \cos \theta_2 \\ V_3 = A_3 \sin \theta_1 - B_3 \cos \theta_1 \end{cases} \quad (5-15)$$

Mais on a  $V_1=0$  en  $\theta_1=0$ ,  $V_2=0$  en  $\theta_2=0$ ,  $V_3=0$  en  $\theta_1=\pi/2$  ; on en déduit :  $B_1=0$ ,  $B_2=0$ ,  $A_3=0$  .

On peut maintenant récrire les relations ( 5-14) en tenant compte de ces simplifications et écrire également les relations ( 5-9) :

$$\begin{cases} N_1 = A_1 \cos \theta_1 + R_1 p_1 \\ N_2 = A_2 \cos \theta_2 + R_2 p_2 \\ N_3 = B_3 \sin \theta_1 + R_1(p_1 - p_2) \end{cases} \quad (5-16)$$

$$\begin{cases} M_1 = R_1(A_1 \cos \theta_1 + C_1) \\ M_2 = R_2(A_2 \cos \theta_2 + C_2) \\ M_3 = R_1(B_3 \sin \theta_1 + C_3) \end{cases} \quad (5-17)$$

On va maintenant écrire l'équilibre des forces et des moments du système constitué par les trois arcs.

La composante globale des forces selon  $O_1x$  appliquées au système est la résultante de la composante selon cette direction des forces de pression et des réactions aux extrémités. La composante selon  $O_1x$  des forces de pression vaut  $R_1 p_1 - (R_2 + d)p_2$  ; la composante des forces de réaction vaut  $-N_1 + N_2 = -A_1 - R_1 p_1 + A_2 + R_2 p_2$  . On en déduit :

$$A_2 - A_1 - d p_2 = 0 \quad (5-18)$$

On écrit maintenant l'équilibre des forces selon  $O_1y$ . La composante selon  $O_1y$  des forces de pression vaut  $R_1 p_1 \sin \alpha_1 + R_1(p_1 - p_2)(1 - \sin \alpha_1) + R_2 p_2 \sin \alpha_2$  ; la composante

selon  $O_1y$  des forces de réaction vaut  $-(B_3 + R_1(p_1 - p_2))$ . L'équilibre des forces selon  $O_1y$  s'écrit finalement :

$$B_3 = p_2(R_1 \sin \alpha_1 + R_2 \sin \alpha_2) = p_2 D \quad (5-19)$$

Écrivons maintenant l'équilibre des moments au point de raccord Q. On obtient :

$$R_1(A_1 \cos \alpha_1 + C_1) - R_2(A_2 \cos \alpha_2 + C_2) - R_1(B_3 \sin \alpha_1 + C_3) = 0 \quad (5-20)$$

On avait six inconnues  $A_1, A_2, B_3, C_1, C_2, C_3$  ; la relation (5-19) détermine  $B_3$ . Il nous reste cinq inconnues  $A_1, A_2, C_1, C_2, C_3$ , et les deux relations (5-18) et (5-20). Il ne reste en définitive que trois inconnues hyperstatiques que l'on peut choisir parmi les cinq inconnues restantes (il s'agit donc d'un système hyperstatique de degré 3).

On peut par exemple choisir  $C_1, C_2, C_3$ . On peut alors exprimer  $A_1$  et  $A_2$  :

$$A_1 = \frac{C_3 - C_1 - C_2 + dp_2 \cos \alpha_1 + B_3 \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2} \quad (5-21)$$

$$A_2 = \frac{C_3 - C_1 - C_2 - dp_2 \cos \alpha_2 + B_3 \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2} \quad (5-22)$$

Ce calcul suppose évidemment que  $\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2$  ne soit pas nul ; ceci exclut le cas où les deux cosinus sont nuls.

#### 5.2.4. Principe de l'étude statique

On aura construit une solution statique pour le système d'arcs soumis aux pressions  $p_1$  et  $p_2$  si on peut trouver des valeurs des paramètres hyperstatiques telles qu'en tout point de chaque arc le critère de résistance soit vérifié.

Il faut remarquer que les trois paramètres hyperstatiques permettent d'explorer l'ensemble des champs statiques équilibrant le chargement extérieur caractérisé par les deux paramètres  $p_1$  et  $p_2$ .

On voit sur les expressions (5-16), (5-17) que  $N$  et  $M$  ne peuvent atteindre un extremum sur un tronçon d'arc qu'aux extrémités de cet arc, dans l'hypothèse que nous supposons toujours vérifiée dans la suite que les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont compris entre 0 et  $\pi/2$ .

### 5.2.4.1. Cas d'un critère sans interaction

Le problème se simplifie si on suppose que le critère de résistance est de la forme :

$$(|N| \leq N_0; |M| \leq M_0) \quad (5-23)$$

La forme du domaine de résistance est donnée ci-dessous.

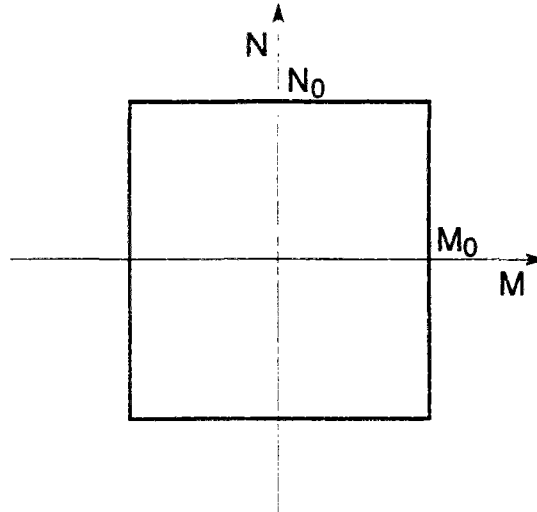


Figure 5-8 Critère sans interaction (M,N)

Alors, si le critère de résistance a la forme indiquée ci-dessus, il suffit que le critère de résistance soit vérifié aux deux extrémités d'un tronçon pour qu'il soit vérifié sur l'intégralité de ce tronçon. Cette propriété est vraie en particulier si tout couple  $(M, N)$  satisfaisant  $M_1 \leq M \leq M_2$  et  $N_1 \leq N \leq N_2$  avec  $(M_1, N_1)$  et  $(M_2, N_2)$  satisfaisant les conditions (5-23), satisfait lui aussi ces mêmes conditions.

Dans ce cas, le problème de l'existence d'un champ statiquement admissible vérifiant en tout point le critère de résistance est équivalent à la compatibilité d'un système d'équations et d'inéquations linéaire. Ce système comporte 24 inéquations linéaires (4 issues de (5-23) pour chacune des 2 extrémités de chacun des 3 arcs) et les trois équations linéaires (5-19), (5-21) et (5-22).

Les inconnues du système de ce système sont  $A_1, A_2, B_3, C_1, C_2, C_3$  ; les données du problème sont les caractéristiques de résistance  $N_0, M_0$  et les caractéristiques géométriques  $R_1, R_2, \alpha_1, \alpha_2$ . Les caractéristiques du chargement  $p_1$  et  $p_2$  apparaissent ici comme des paramètres. Le problème est de déterminer pour quelles valeurs de ces deux paramètres ce système admet des solutions. Si les valeurs numériques des données du problème sont fixées, la compatibilité du système peut être évaluée par les méthodes numériques de la programmation linéaire.

### 5.2.5. Exemple de résolution numérique

On a retenu les données suivantes :

$$R_1=7,48 \text{ m} ; R_2=5,252 \text{ m} ; \alpha_1=0,8535 \text{ rad}=48,9^\circ ; \alpha_2= 0,9986 \text{ rad}=57,23^\circ.$$

Ces données géométriques sont celles d'un projet de gabionnade établi pour prolonger un quai du port de Cherbourg.

Pour les caractéristiques de résistance, on a pris :

$$N_0=3000 \text{ kN/m}, M_0=9 \text{ kNm/m}.$$

Ces valeurs sont basées sur les hypothèses suivantes : l'épaisseur  $e$  de l'enceinte de palplanches est supposée uniforme et égale 12mm, la résistance à la traction simple de l'acier  $\sigma_0$  a été prise égale à 250MPa, on a pris  $N_0=\sigma_0 e$  et  $M_0=\sigma_0 e^2/4$ . On notera que les hypothèses faites sur  $M_0$  sont très optimistes ; elles ne prennent pas en compte la flexibilité apportée par les serrures des palplanches. On a pu ainsi déterminer la frontière du domaine des chargements potentiellement supportables point par point (Tableau 5-1).

$p_1$ (Pa)	0	400750	400818,9	400902,5	400986	401065	401069,5
$p_2$ (Pa)	971,4	928,9	728,5	485,5	242,8	13,1	0

Tableau 5-1 Chargements extrêmes

L'examen du tableau ci-dessus montre que la forme du domaine est très proche d'un rectangle très allongé. Mais la conclusion la plus importante est que la pression supportable dans l'arc de raccordement, évaluée dans la configuration initiale, est extrêmement faible ; la valeur de 971,4 Pa correspond à la pression engendrée par une colonne d'eau d'environ 10 cm. En revanche, on retrouve la valeur déduite de la formule des chaudronniers pour la valeur de la pression supportable dans l'arc principal.

On peut expliquer la très faible valeur obtenue pour les pression supportables dans la cellule de raccord en considérant les conditions à remplir pour avoir l'équilibre de la cellule de raccord. La résistance à la flexion est très faible. Négligeons la et essayons d'écrire l'équilibre membranaire de la palplanche de raccord. La présence d'une pression dans l'arc de raccord induit alors nécessairement  $N_2 \neq 0$ . On doit avoir (voir Figure 5-7) l'équilibre :

$$\underline{N}_1 + \underline{N}_2 + \underline{N}_3 = 0 \quad (5-24)$$

Compte tenu de la géométrie de la gabionnade,  $\underline{N}_1$  et  $\underline{N}_3$  sont colinéaires alors que  $\underline{N}_2$  a une direction différente. L'équation ci-dessus est donc impossible.



On peut mettre ces résultats sous forme graphique :

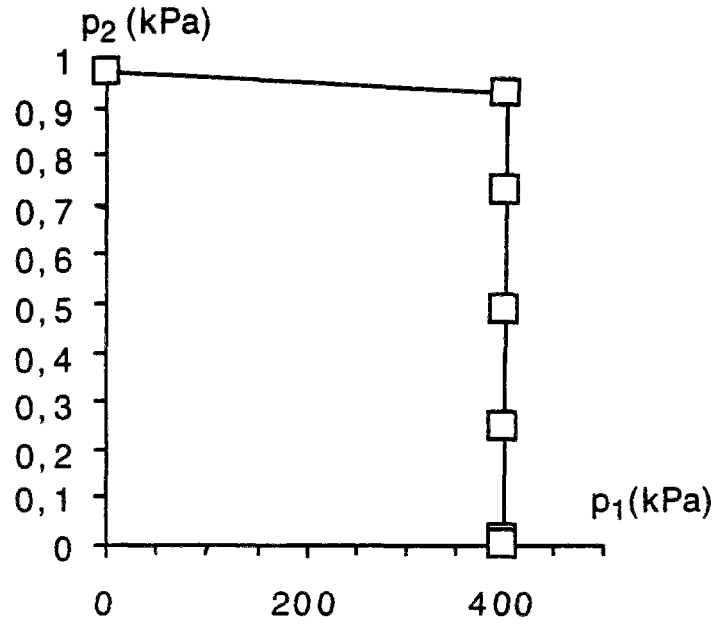


Figure 5-9 Domaine de résistance

### 5.2.6. Etude paramétrique pour les valeurs des angles $\alpha_1$ et $\alpha_2$

On suppose que les valeurs des rayons utilisés dans le paragraphe précédent sont inchangées et l'on fait varier les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

La condition de non-pénétration des cellules principales conduit pour chaque valeur de  $\alpha_2$  à une valeur minimale de  $\alpha_1$  que l'on notera  $\alpha_{1min}$ . La condition de non-pénétration de la cellule secondaire et de la cellule principale conduit à limiter  $\alpha_1$  à une valeur  $\alpha_{1max}$  dans le cas des grandes valeurs de  $\alpha_2$ .

$\alpha_2$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°
$\alpha_{1min}$	90°	60,7°	43,4°	39,1°	31,7°	25,8°	21,2°	17,9°	15,9°	15,2°	15,9°	17,9°
$\alpha_{1max}$	90°	90°	90°	90°	90°	90°	90°	90°	90°	90°	80°	70°

Tableau 5-2 Valeurs extrêmes du paramètre  $\alpha_1$

On a cherché pour les différentes valeurs des paramètres la valeur maximale supportable de  $p_2$  ; le calcul numérique montre que cette valeur maximale est atteinte pour  $p_1=0$ . Le tableau ci-après donne la valeur maximale supportable de  $p_2$  en Pa pour diverses configurations géométriques.

	$\alpha_2=10^\circ$	$\alpha_2=20^\circ$	$\alpha_2=30^\circ$	$\alpha_2=40^\circ$	$\alpha_2=50^\circ$	$\alpha_2=60^\circ$	$\alpha_2=70^\circ$	$\alpha_2=80^\circ$	$\alpha_2=90^\circ$	$\alpha_2=100^\circ$	$\alpha_2=110^\circ$
$\alpha_1=20^\circ$							488	473	468	473	488
$\alpha_1=30^\circ$					620	581	555	540	535	540	554
$\alpha_1=40^\circ$			906	823	763	720	691	675	670	675	688
$\alpha_1=50^\circ$		1366	1231	1130	1055	1001	964	916	842	786	744
$\alpha_1=60^\circ$	2430	2170	1973	1823	1710	1629	1487	1213	1049	929	840
$\alpha_1=70^\circ$	5024	4521	4133	3835	3610	3447	3335	2134	1487	1173	964
$\alpha_1=80^\circ$	19134	16028	8321	5911	5320	6262	12879	8699	3190	1792	
$\alpha_1=90^\circ$	43849	11759	5889	3940	3198	3068	3569	5867	571210		

Tableau 5-3 Valeur extrême supportable de  $p_2$  (Pa) pour diverses configurations géométriques

Dans le cas de cylindres tangents ( $\alpha_1=\alpha_2=\pi/2$ ), on retrouve la résistance donnée par la formule des chaudronniers pour la cellule de raccordement. Pour les autres configurations, la valeur maximale supportable de  $p_2$  est très inférieure à celle donnée par la formule des chaudronniers.

### 5.2.7. Localisation des points où le critère de résistance est saturé

Les calculs numériques permettant de déterminer les valeurs extrêmes supportables pour les paramètres de chargement évaluent en même temps les valeurs atteintes pour l'ensemble des paramètres du système. On peut ainsi voir quelles sont les conditions qui sont saturées et donc en quels points N ou M atteignent leurs valeurs extrémales. Nous donnons à titre d'exemple le résultat pour certains cas traités précédemment (géométrie du projet de prolongement d'un quai à Cherbourg).

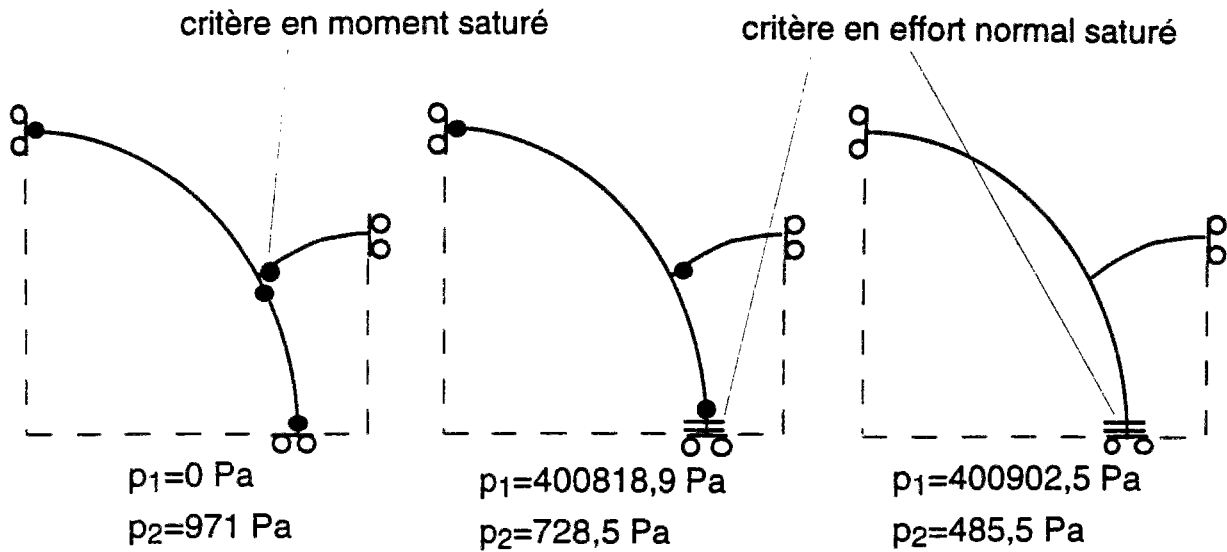


Figure 5-10 Lieux de saturation du critère de résistance

Sur ces exemples, nous nous contenterons de quelques remarques. Dans le schéma de droite, il s'agit d'un mécanisme d'éclatement par pression interne ; il se produit pour une valeur de la pression interne dans la cellule principale très proche de celle correspondant à l'éclatement d'une cellule isolée (donnée par la formule des chaudronniers). Il met en jeu la résistance à l'effort normal. Le schéma de gauche illustre une situation où la limite de résistance est atteinte pour des valeurs très faibles des pressions ; on remarque que seules des rotules plastiques sont mises en jeu.

Ces localisations des lieux où le critère est saturé peut suggérer des champs de vitesse pour l'étude cinématique. Ainsi le schéma de gauche qui ne fait intervenir que des rotules plastiques peut être associée au champ cinématique figuré ci-après.

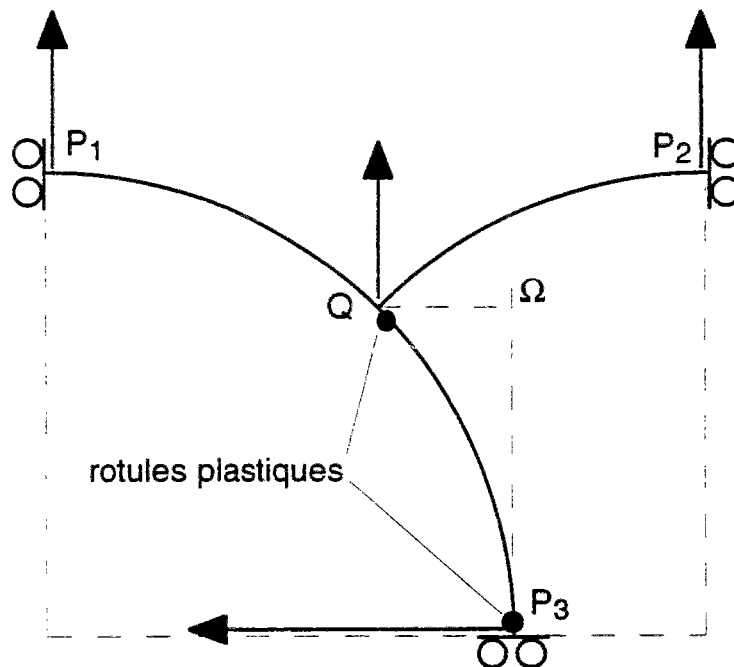


Figure 5-11 Exemple de cinématique de la coque

Ce mécanisme met en jeu une rotule plastique à chaque extrémité de l'arc  $QP_3$ , la partie de la coque  $P_1QP_2$  est en translation, la partie  $QP_3$  est en rotation autour de  $\Omega$ . Nous examinerons au chapitre suivant des manières possibles de compléter ce champ cinématique dans le remblai.

### 5.2.7.1. Cas d'un critère simple avec interaction

Cette méthode de résolution utilisant la programmation linéaire est aussi utilisable pour le critère avec interaction ayant le domaine de résistance figuré ci-après qui est une approximation par l'extérieur du critère  $\left(\frac{N}{N_0}\right)^2 + \left|\frac{M}{M_0}\right| \leq 1$ .

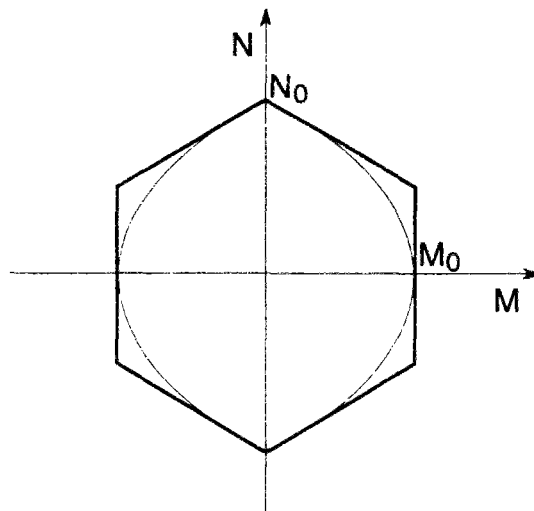


Figure 5-12 Critère avec interaction (M,N)

Ce critère s'écrit sous forme analytique de la manière suivante :

$$\{\pm M \leq M_0; \pm \alpha N \pm M \leq \alpha N_0\} \quad (5-25)$$

Avec le critère (5-25), on a la même propriété qu'avec le critère (5-23) : il suffit de vérifier le critère aux deux extrémités de chaque arc pour le vérifier partout. Mais cette fois, il faut tenir compte de manière plus fine des propriétés des couples (M,N) le long d'un arc. En examinant les équations (5-16) et (5-17), on voit que le long d'un arc, le couple (M,N) se déplace le long d'un segment de droite car M et N, pour chaque segment, sont des fonctions linéaires de la même fonction trigonométrique. La propriété résulte alors de la convexité du critère (5-25).

On peut alors écrire le problème de programmation linéaire correspondant qui est l'analogue du système du § 5.2.4.1.

### 5.2.8. Exemple de résolution numérique

Nous donnons maintenant un exemple numérique repris de (Corfdir, 1996-b) :

$$R_1 = 8 \text{ m} ; R_2 = 5 \text{ m} ; \theta = 45^\circ.$$

On suppose en plus que l'on a  $R_1 = R_2 + d$  (Figure 5-6). On peut alors déterminer les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . On trouve :

$$\alpha_1 = 58,56^\circ, \alpha_2 = 76,44^\circ.$$

Pour les caractéristiques de résistance, on a pris les valeurs suivantes estimées d'après une épaisseur de 12,5 mm et une limite élastique de 430 MPa :

$$M_0 = 14\,456 \text{ Nm/m} ; N_0 = 5\,375\,000 \text{ N/m} ; \alpha = 4,841 \cdot 10^{-3}.$$

Ces valeurs sont basées sur les hypothèses suivantes : l'épaisseur  $e$  de l'enceinte de palplanches est supposée uniforme et égale 12,5mm, la résistance à la traction simple de l'acier  $\sigma_0$  a été prise égale à 430 MPa, on a pris  $N_0 = \sigma_0 e$ . On notera à nouveau que les hypothèses faites sur  $M_0$  sont très optimistes ; elles ne prennent pas en compte la flexibilité apportée par les serrures des palplanches.

On a pu ainsi déterminer la frontière du domaine des chargements potentiellement supportables point par point.

$p_1(\text{kPa})$	0	200,0	298,1	305,2	337,7	370,2	402,8
$p_2(\text{kPa})$	1,7205	1,7205	1,72	1,7	1,6	1,5	1,4
$p_1(\text{kPa})$	435,4	458,8	476,5	494,3	512,1	529,8	547,5
$p_2(\text{kPa})$	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8	0,7
$p_1(\text{kPa})$	565,3	583,1	600,8	618,6	636,4	654,1	671,8
$p_2(\text{kPa})$	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Tableau 5-4 Chargements extrêmes

Nous donnons ci-après une traduction graphique de ces résultats :

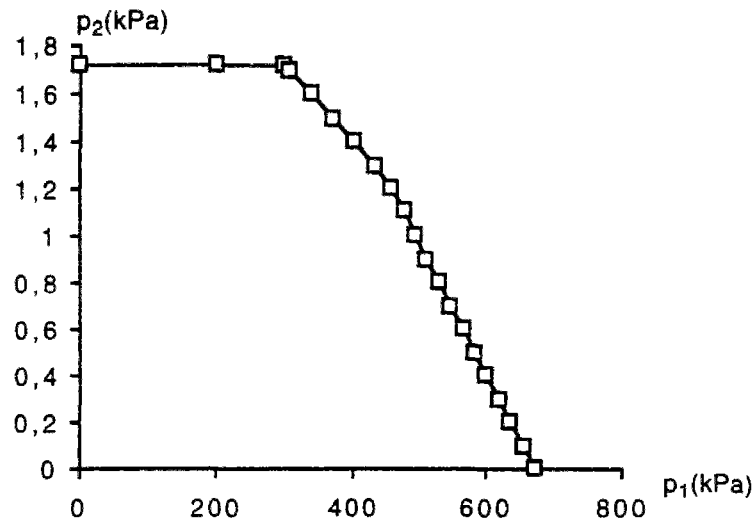


Figure 5-13 Domaine de résistance

L'examen de la figure ci-dessus montre que la forme du domaine est proche d'un trapèze. Mais la conclusion la plus importante est que la pression supportable dans l'arc de raccordement, évaluée dans la configuration initiale, est extrêmement faible ; la valeur de 1,72 kPa correspond à la pression engendrée par une colonne d'eau d'environ 17 cm. En revanche, on retrouve la valeur déduite de la formule des chaudronniers pour la valeur de la pression supportable dans l'arc principal en l'absence de pression dans l'arc de raccordement.

La comparaison de la Figure 5-9 et de la Figure 5-13 montre des ordres de grandeurs très comparables compte tenu des diverses hypothèses faites pour les valeurs extrêmes de  $p_1$  et de  $p_2$ . Toutefois la forme générale du domaine est trapézoïdale pour le critère avec interaction alors qu'elle était rectangulaire pour le critère sans interaction.

### 5.2.9. Conclusions

La conclusion de cette étude en configuration initiale peut être considérée comme partiellement négative : il n'est pas possible pour le type de statique considéré de supporter des chargements ayant l'ordre de grandeur des chargements réels.

Rappelons les diverses hypothèses faites :

- on raisonne en configuration initiale non déformée
- on considère un champ de Rankine dans le remblai
- on ne tient compte que de la résistance à la traction  $N_{\theta\theta}$ , à l'effort tranchant  $V_\theta$  et au moment fléchissant  $M_{\theta\theta}$ .

La deuxième hypothèse constitue indéniablement un choix restrictif ; elle est justifiée par la simplicité du champ. Pour tester son influence, il faudrait rechercher numériquement d'autres types de champ dans le remblai.

La troisième hypothèse pose peut-être moins de problèmes. En raisonnant par analogie avec l'étude de la coque cylindrique soumise à une pression hydrostatique, on est conduit à penser notamment que la prise en compte de la résistance à  $M_{zz}$  ne devrait pas être de nature à changer complètement l'ordre de grandeur du chargement maximal supportable.

L'influence majeure de l'hypothèse « configuration non déformée » sera mise en évidence dans la suite où l'on verra que l'on construit, en conservant les deux autres hypothèses, une solution statique équilibrant le poids propre pour des données géométriques, de résistance et de poids réalistes.

### **5.3 Équilibre membranaire d'une gabionnade**

Dans la partie 5.2, nous avons étudié des solutions statiques faisant jouer la résistance à l'effort normal  $N_{\theta\theta}$  et au moment fléchissant  $M_{\theta\theta}$ . Nous allons maintenant envisager l'équilibre membranaire qui ne fait plus intervenir que la résistance à l'effort normal. On a vu (§5.2.5) qu'un tel équilibre est impossible en configuration non déformée à cause des conditions d'équilibre au point de raccord entre la cellule principale et la cellule de raccord, dès que l'arc de raccord est soumis à une pression interne.

Nous allons donc envisager une configuration déformée telle que la coque soit en équilibre membranaire. Nous nous limiterons au cas où les longueurs des différents arcs sont inchangés et où la forme reste cylindrique (la configuration géométrique est entièrement définie par sa projection sur le plan horizontal). Le strict respect de ces hypothèses suppose que le bord inférieur de la coque est libre.

Nous étudierons l'équilibre membranaire dans deux cas :

- le cas particulier où les pressions sont égales dans les cellules principales et dans les arcs de raccord
- le cas plus général où elles sont différentes.

Les équations de l'équilibre membranaire ont été obtenues par Rossow (1984). Néanmoins, les travaux de Rossow avaient pour objectif la détermination des efforts dans la coque compte tenu d'une distribution de pressions exercées par le remblai, distribution supposée connue par ailleurs. Dans notre étude, il s'agira de déterminer un chargement pouvant être équilibré par des efforts dans le remblai et dans les palplanches, ces efforts vérifiant les critères de résistance et les équations d'équilibre.

Dans cette optique, le cas des pressions égales dans les cellules principales et dans les cellules de raccord est primordial. Par rapport aux travaux antérieurs, ce cas fait l'objet d'une étude sur les conditions géométriques qui sont nécessaires pour qu'un tel équilibre soit possible ainsi que d'une étude analytique des solutions.

Nous donnerons également, sur un exemple numérique, le domaine de résistance en prenant comme paramètres de chargement les pressions (uniformes) dans la cellule principale et la cellule secondaire dans le cas où la coque ne résiste qu'aux efforts membranaires.

#### **5.3.1 Caractérisation géométrique de l'équilibre membranaire dans le cas $p_1=p_2$**

Nous supposons que la configuration initiale est une gabionnade constituée de gabions cellulaires comme celle que nous avons étudiée précédemment. Nous allons déterminer la configuration d'équilibre membranaire que peut prendre cette gabionnade sous l'effet d'une pression interne dans les cellules principales et les



cellules de raccord. Nous rappelons l'hypothèse que les longueurs des différents arcs sont inchangées.

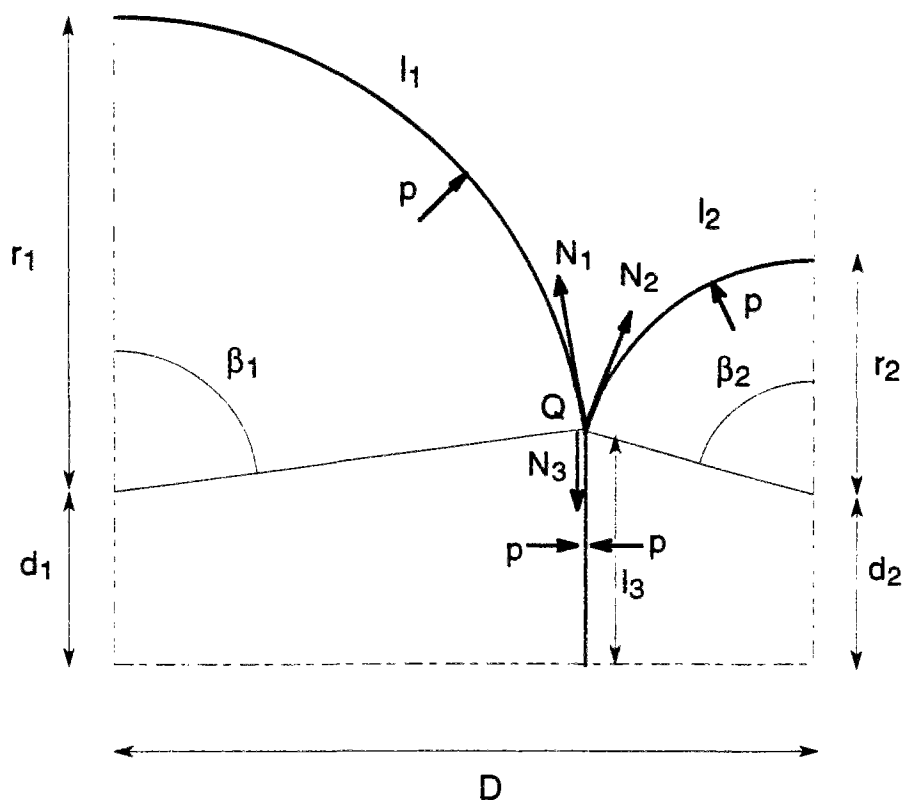


Figure 5-14 Géométrie d'une cellule élémentaire en équilibre membranaire

Raisonnant sur une « tranche » horizontale, on se place donc dans le cas de l'équilibre filaire avec comme seul effort extérieur une pression constante. On vérifie alors facilement que les seules formes géométriques possibles sont des arcs de cercle ou des segments de droite (sauf si la pression et la tension sont nulles toutes les deux). Par définition de l'équilibre membranaire, le moment  $M(s)$  est nul ainsi que l'effort tranchant  $V(s)$ . Comme il n'y a pas non plus de forces extérieures tangentes appliquées, on en déduit que  $N(s)$  est constant. Désignons par  $\rho(s)$  le rayon de courbure de l'arc au point  $s$ . L'équation (4-5) donne :  $\frac{N}{\rho(s)} = p$ . On conclut que si  $N$  et  $p$  sont tous les deux non nuls,  $\rho(s)$  est une constante non nulle ; on a alors un cercle. Si  $N$  n'est pas nul et si  $p$  est nul alors le rayon de courbure  $\rho$  est infini et la figure d'équilibre est une droite.

Notons tout de suite les relations qui existent entre les différents paramètres géométriques de cette configuration déformée. On a pour chaque arc de cercle :  $l_i = r_i \beta_i$ . On a également la relation suivante :  $D = r_1 \sin \beta_1 + r_2 \sin \beta_2$ .

On suppose maintenant que la pression est la même dans les cellules principales et dans les cellules de raccordement. Il est donc naturel d'envisager des configurations d'équilibre du type de la figure ci-dessus. On remarque qu'une

gabionnade constituée de gabions cloisonnés (voir chapitre 1) est un cas particulier de la configuration que nous envisageons maintenant.

On peut déjà remarquer que la somme  $l_1+l_2$  doit vérifier certaines conditions. Premièrement, on doit avoir  $l_1+l_2 \geq D$ . Dans le cas limite où l'inégalité deviendrait une égalité, les tensions  $N_1$  et  $N_2$  seraient infinies. Deuxièmement, on doit avoir également  $l_1+l_2 \leq \pi D/2$ . En effet, on a :

$$D = r_1 \sin \beta_1 + r_2 \sin \beta_2 = l_1 \frac{\sin \beta_1}{\beta_1} + l_2 \frac{\sin \beta_2}{\beta_2} \quad (5-26)$$

On sait qu'on a l'inégalité mathématique suivante :  $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$  si  $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ . On peut finalement conclure :

$$D \leq l_1 + l_2 \leq \frac{\pi}{2} D \quad (5-27)$$

Remarquons que si on avait  $l_1 + l_2 > \frac{\pi}{2} D$ , les deux arcs  $l_1$  et  $l_2$  viendraient en contact et la figure d'équilibre aurait l'allure ci-après :

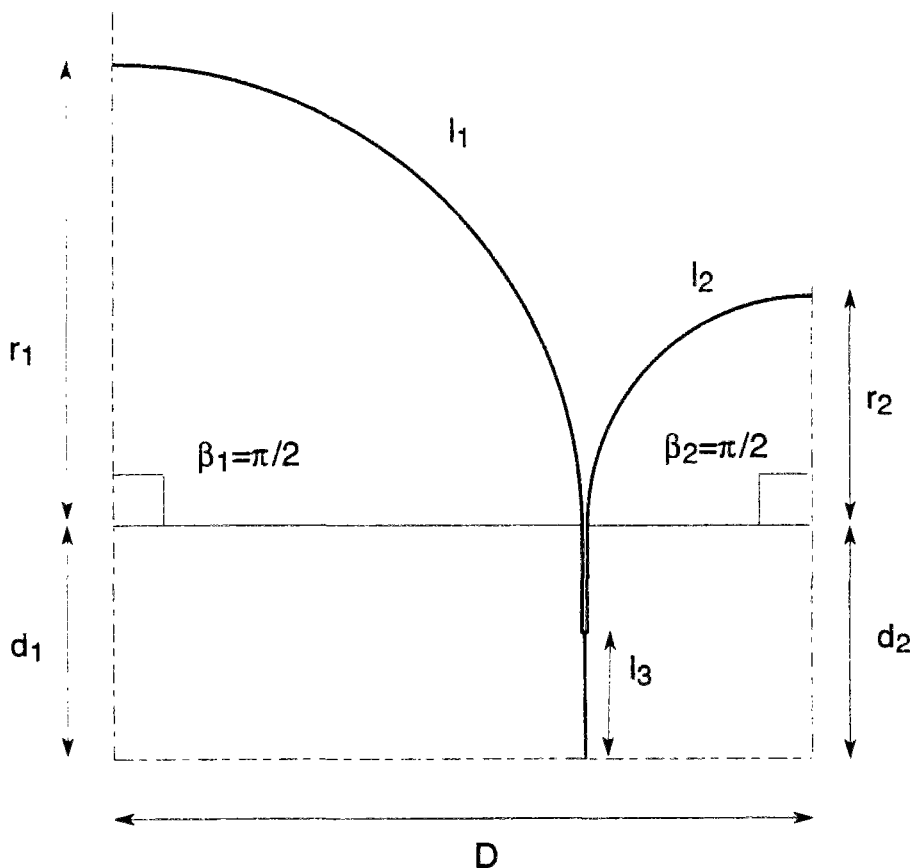


Figure 5-15 Géométrie d'une cellule en équilibre membranaire si  $l_1+l_2 > \pi D/2$

### 5.3.2 Equations de l'équilibre

On suppose que la condition ( 5-27) est vérifiée. On note  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  l'effort normal dans les tronçons de longueur  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ . Il faut utiliser une relation supplémentaire traduisant l'équilibre ; pour cela on écrit l'équilibre des tensions au point de raccord Q . On obtient ainsi :

$$\begin{cases} N_1 \cos \beta_1 = N_2 \cos \beta_2 \\ N_3 = N_1 \sin \beta_1 + N_2 \sin \beta_2 \end{cases} \quad (5-28)$$

On utilise pour chaque arc de cercle la formule des chaudronniers et on écrit également l'équilibre global. On obtient :

$$\begin{cases} N_1 = r_1 p \\ N_2 = r_2 p \\ N_3 = D p \end{cases} \quad (5-29)$$

Introduisons les variables adimensionnelles  $\rho_1 = r_1/D$ ,  $\rho_2 = r_2/D$ ,  $\lambda_1 = l_1/D$ ,  $\lambda_2 = l_2/D$ . En remplaçant dans le système ( 5-29) les valeurs des efforts déduites de la formule des chaudronniers et de l'équilibre global et en utilisant les variables adimensionnelles que nous venons d'introduire, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \sin \beta_1 + \rho_2 \sin \beta_2 = 1 \\ \rho_1 \cos \beta_1 - \rho_2 \cos \beta_2 = 0 \end{cases} \quad (5-30)$$

On résout ce système<sup>1</sup> par rapport à  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . On obtient les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{\cos \beta_2}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} \\ \rho_2 = \frac{\cos \beta_1}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} \end{cases} \quad (5-31)$$

On peut également écrire les valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \beta_1 \frac{\cos \beta_2}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} \\ \lambda_2 = \beta_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} \end{cases} \quad (5-32)$$

<sup>1</sup> La deuxième équation du système ( 5-30) peut être interprétée de manière géométrique : elle équivaut à l'égalité des longueurs  $d_1$  et  $d_2$  de la Figure 5-14.

Finalement, on obtient une expression des efforts en fonction des angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , de la distance  $D$  et de la pression  $p$ .

### 5.3.3 Détermination de l'arc le plus chargé

L'expression des efforts que nous venons d'établir permet de voir que l'arc le plus long supporte la tension la plus importante. En effet,  $N_1$  est supérieur à  $N_2$  si et seulement si  $\cos\beta_2$  est supérieur à  $\cos\beta_1$ , c'est à dire, comme les angles sont compris entre 0 et  $\pi/2$ , si et seulement si  $\beta_1$  est supérieur à  $\beta_2$ . On vérifie de la même façon que  $l_1$  est supérieur à  $l_2$  si et seulement si  $\beta_1$  est supérieur à  $\beta_2$ . Pour cela, il suffit de remarquer que la fonction  $\cos\beta/\beta$  est elle aussi décroissante pour  $\beta$  compris entre 0 et  $\pi/2$ . Ces remarques permettent de conclure que l'arc de cercle le plus long est le plus chargé.

Il reste à déterminer quand  $N_3$  est plus grand que le plus grand de  $N_1$  et de  $N_2$ . Pour cela, le paramétrage intéressant est  $l_1$  et  $l_2$  qui sont des données du problème (ou de manière équivalente  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ) et non pas  $\beta_1$  et  $\beta_2$  a priori inconnus. Le cas limite est  $N_1=N_3$  si  $\beta_2$  est supérieur à  $\beta_1$ . Ceci se traduit par l'équation suivante :  $\cos\theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$ . Après calcul on trouve la relation suivante :

$$\theta_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta_1}{2} \quad (5-33)$$

On vérifie que le résultat trouvé est compatible avec l'hypothèse du calcul ( $\beta_2 \geq \beta_1$ ) si et seulement si  $\beta_2 \geq \pi/6$  (ou de manière équivalente  $\beta_1 < \pi/6$ ). Pour le cas où  $\beta_1$  est plus grand que  $\beta_2$ , on trouve bien entendu une relation analogue en échangeant les deux variables. On peut ainsi obtenir une représentation paramétrique dans le plan  $\lambda_1, \lambda_2$  de la courbe séparant le domaine où  $N_3$  est le plus grand du domaine où c'est  $N_1$  ou  $N_2$ .

On est ainsi en mesure d'indiquer en fonction de  $\lambda_1$  et de  $\lambda_2$  quelle est la tension la plus forte.

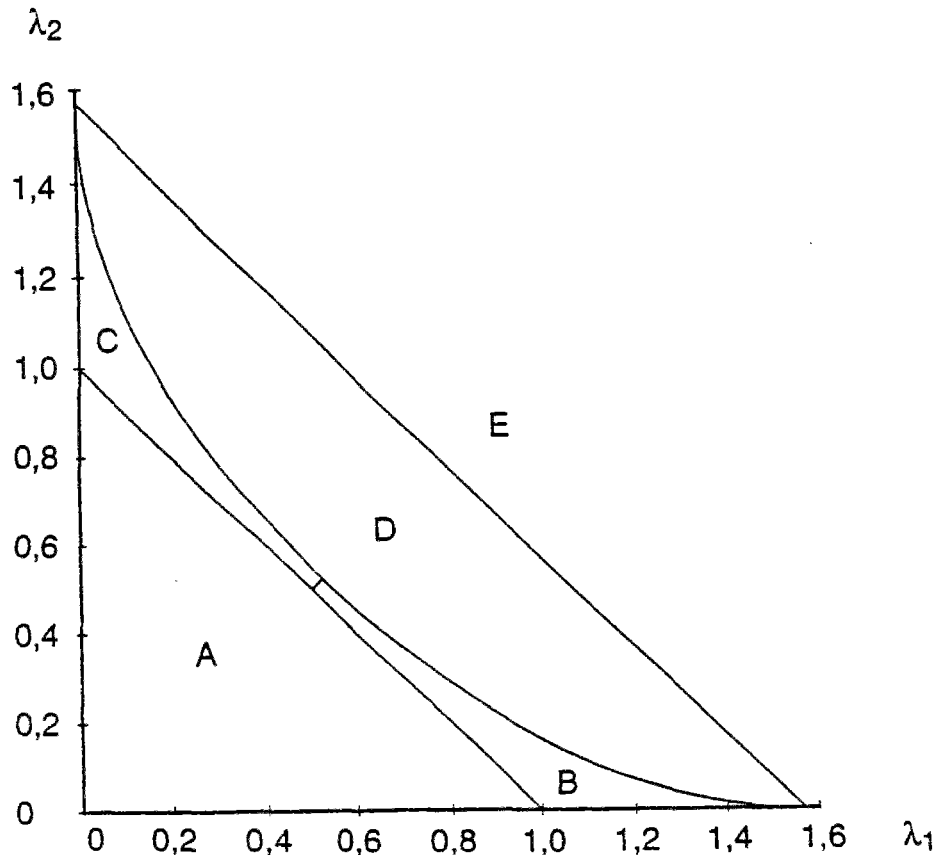


Figure 5-16 Arc le plus chargé en fonction de  $\lambda_1$  et de  $\lambda_2$

La zone notée A est impossible ( $l_1 + l_2 \leq D$ ) ; la zone notée E sort du cadre de notre calcul ( $l_1 + l_2$  trop grand par rapport à D). Dans la zone D c'est l'arc  $l_3$  qui est le plus chargé. Dans la zone B (respectivement C), c'est l'arc  $l_1$  (respectivement  $l_2$ ) qui est le plus chargé.

### 5.3.4 Détermination de la valeur de la tension la plus forte

On va construire les courbes  $N_1 = \text{Constante}$ . Utilisons les variables adimensionnelles définies précédemment. Il faut chercher les courbes :

$$\frac{\cos \beta_2}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} = \eta \quad (5-34)$$

Après calcul, il vient :

$$\cos \beta_2 = \frac{\eta \cos \beta_1}{\sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta \sin \beta_1}} \quad (5-35)$$

On obtient ainsi une représentation paramétrique des courbes  $\rho_1 = \eta$  :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \eta \beta_1 \\ \lambda_2 = \sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta \sin \beta_1} \arccos \left( \frac{\eta \cos \beta_1}{\sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta \sin \beta_1}} \right) \end{cases} \quad (5-36)$$

On peut tracer de même les courbes  $N_2 = \text{Constante}$ , et on connaît la valeur de  $N_3$ . On est donc en mesure de tracer les courbes  $\max(N_1, N_2, N_3) = \text{Constante}$ .

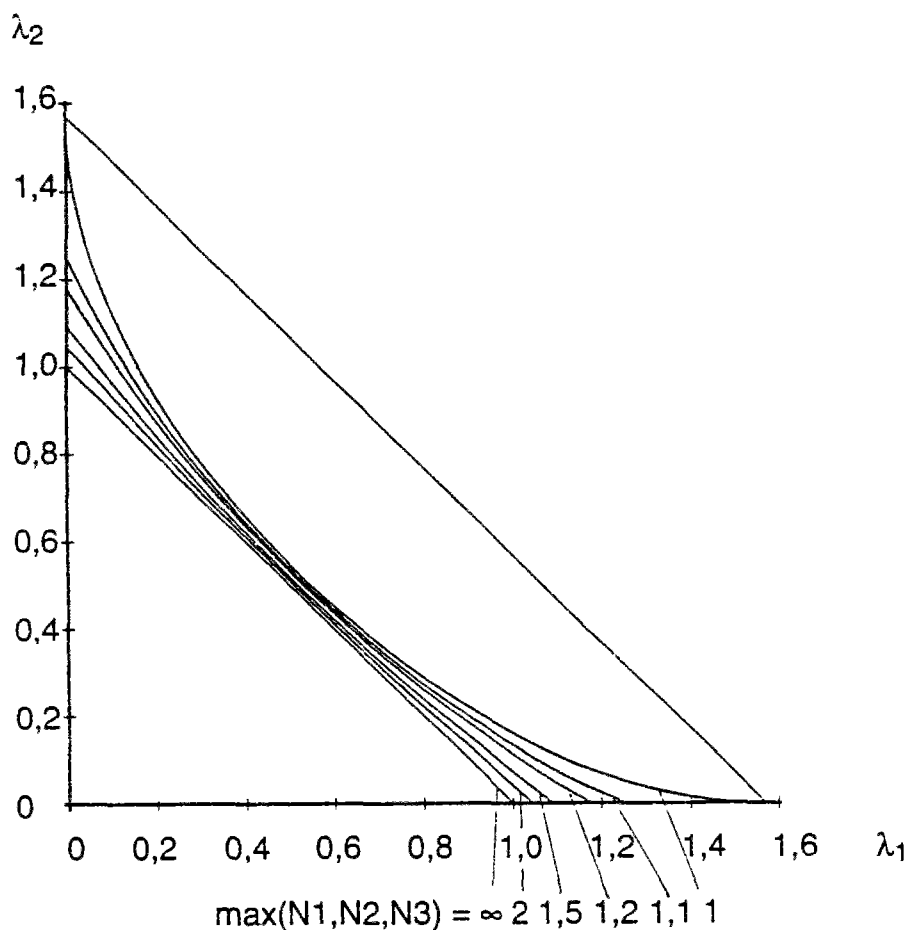


Figure 5-17 Valeur de  $\max(N_1, N_2, N_3)/pD$  en fonction de  $\lambda_1$  et de  $\lambda_2$

### 5.3.5 Construction d'une statique pour la gabionnade

Nous sommes maintenant en mesure de construire une statique pour le problème de la gabionnade sous poids propre, en adaptant la démarche utilisée pour le gabion isolé (§3.1 et §3.3.1).

## Chapitre 5

A cet effet, on considère le champ statique suivant :

- dans le remblai intérieur (identique dans les cellules principales comme dans les cellules secondaires), on prend un champ de Rankine (on choisit l'axe vertical des  $z$  orienté vers le haut avec son origine au sommet de la gabionnade) :

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = \gamma z \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = K_a \gamma z \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \end{cases} \quad (5-37)$$

- dans l'enceinte de palplanches, on choisit la solution correspondant à l'équilibre membranaire.

♦ Pour les arcs, en utilisant le système de coordonnées cylindriques adapté, on considère le champ statique suivant :

$$\begin{cases} N_{\theta\theta} = -r_1 K_a \gamma z ; N_{\theta z} = N_{zz} = 0 \\ \underline{\underline{M}} = 0 \\ \underline{\underline{V}} = 0 \end{cases} \quad (5-38)$$

♦ Pour les cloisons verticales, on considère le champ suivant :

$$\begin{cases} N_{yy} = -DK_a \gamma z ; N_{yz} = N_{zz} = 0 \\ \underline{\underline{M}} = 0 \\ \underline{\underline{V}} = 0 \end{cases} \quad (5-39)$$

Les équations d'équilibres sont vérifiées, compte tenu de la géométrie de l'équilibre membranaire. Le critère de résistance est vérifié partout si on a :

$$\left[ \gamma \leq \frac{N_0}{K_a H_{\text{sup}}(r_1, r_2, D)} \right] \quad (5-40)$$

### 5.3.6 Cas $p_1 \neq p_2$

#### 5.3.6.1 Caractérisation géométrique

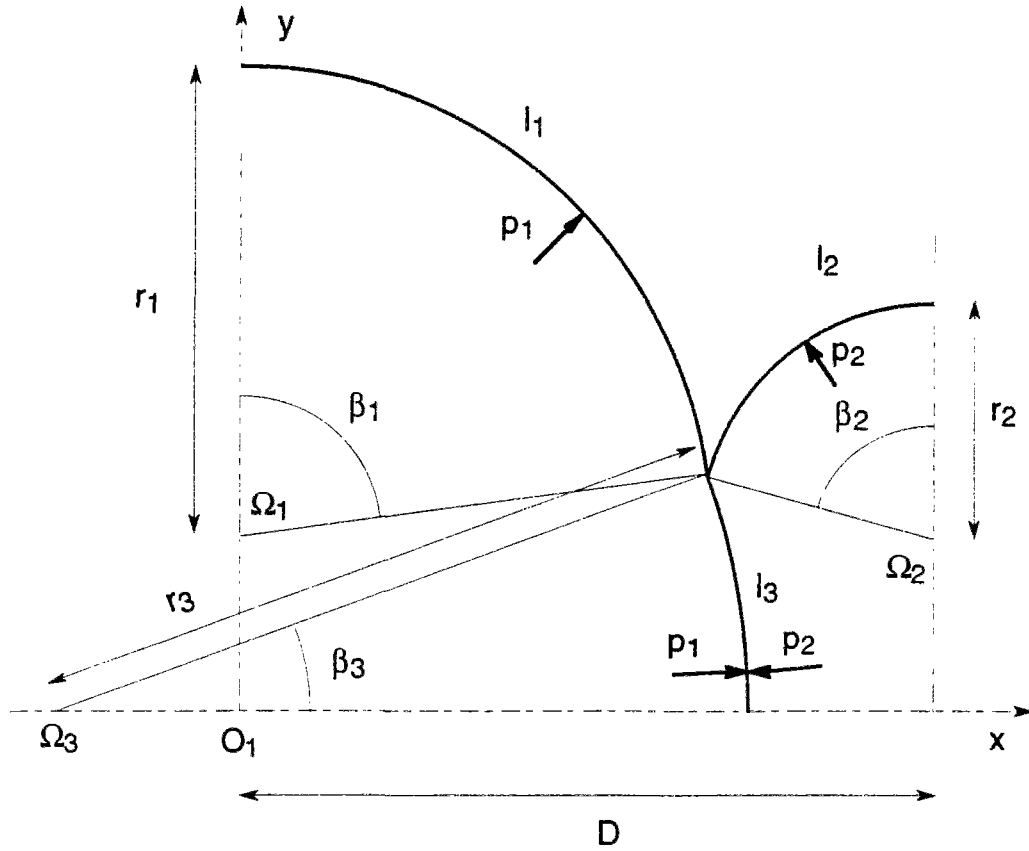


Figure 5-18 Géométrie d'une cellule élémentaire en équilibre membranaire pour  $p_1 > p_2$

Comme pour le cas où les pressions sont égales dans les cellules principales et les cellules de raccord, les figures d'équilibre sont des arcs de cercle (tous de rayon fini si  $p_1 \neq p_2$  alors que si  $p_1 = p_2$  le rayon  $r_3$  est infini et l'arc  $l_3$  est un segment de droite). La prise en considération des symétries permet encore de simplifier l'étude du problème. Ces symétries permettent de préciser la position des centres des arcs de cercle à l'équilibre ; ainsi l'arc  $l_1$  est normal par symétrie à la droite  $O_1y$  qui est un axe de symétrie, donc le centre  $\Omega_1$  de cet arc est sur cette droite. On fait de même pour le centre  $\Omega_2$  de  $l_2$  et le centre  $\Omega_3$  de  $l_3$ .

Comme précédemment, on écrit l'équilibre des arcs au point de raccordement (ici dans le cas  $p_1 > p_2$ ) :

$$\begin{cases} -N_1 \cos \beta_1 + N_2 \cos \beta_2 + N_3 \sin \beta_3 = 0 \\ N_1 \sin \beta_1 + N_2 \sin \beta_2 - N_3 \cos \beta_3 = 0 \end{cases} \quad (5-41)$$



On récrit la relation entre la distance et les autres paramètres :

$$r_1 \sin \beta_1 + r_2 \sin \beta_2 - D = 0 \quad (5-42)$$

On utilise à nouveau les variables adimensionnelles  $\lambda_i = l_i / D$  et  $\rho_i = r_i / D$  et on obtient le système suivant en prenant en compte l'équation d'équilibre de chaque arc et en écrivant la longueur de chaque arc :

$$\begin{cases} -\rho_1 p_1 \cos \beta_1 + \rho_2 p_2 \cos \beta_2 + \rho_3 (p_1 - p_2) \sin \beta_3 = 0 \\ \rho_1 p_1 \sin \beta_1 + \rho_2 p_2 \sin \beta_2 - \rho_3 (p_1 - p_2) \cos \beta_3 = 0 \\ \rho_1 \sin \beta_1 + \rho_2 \sin \beta_2 - 1 = 0 \\ \rho_1 \beta_1 = \lambda_1 \\ \rho_2 \beta_2 = \lambda_2 \\ \rho_3 \beta_3 = \lambda_3 \end{cases} \quad (5-43)$$

En substituant dans les trois premières équations les valeurs des  $\rho_i$  tirées des trois dernières, on obtient le système suivant de trois équations à trois inconnues  $\beta_i$  :

$$\begin{cases} \frac{-\lambda_1}{\beta_1} p_1 \cos \beta_1 + \frac{\lambda_2}{\beta_2} p_2 \cos \beta_2 + \frac{\lambda_3}{\beta_3} (p_1 - p_2) \sin \beta_3 = 0 \\ \frac{\lambda_1}{\beta_1} p_1 \sin \beta_1 + \frac{\lambda_2}{\beta_2} p_2 \sin \beta_2 - \frac{\lambda_3}{\beta_3} (p_1 - p_2) \cos \beta_3 = 0 \\ \frac{\lambda_1}{\beta_1} \sin \beta_1 + \frac{\lambda_2}{\beta_2} \sin \beta_2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (5-44)$$

Ce système peut être résolu numériquement, par exemple en utilisant un logiciel de calcul du type Maple. On obtient ainsi en fonction des pressions  $p_1$  et  $p_2$  et des caractéristiques géométriques  $l_1, l_2, l_3$  et  $D$ , les tensions  $N_1, N_2$  et  $N_3$ .

Dans le cas  $p_1 < p_2$ , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1}{\beta_1} p_1 \cos \beta_1 - \frac{\lambda_2}{\beta_2} p_2 \cos \beta_2 + \frac{\lambda_3}{\beta_3} (p_2 - p_1) \sin \beta_3 = 0 \\ \frac{\lambda_1}{\beta_1} p_1 \sin \beta_1 + \frac{\lambda_2}{\beta_2} p_2 \sin \beta_2 - \frac{\lambda_3}{\beta_3} (p_2 - p_1) \cos \beta_3 = 0 \\ \frac{\lambda_1}{\beta_1} \sin \beta_1 + \frac{\lambda_2}{\beta_2} \sin \beta_2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (5-45)$$

### 5.3.6.2 Exemple de détermination du domaine des chargements supportables dans le cas membranaire

On reprend le cas étudié en 5.2.8 dont on rappelle les caractéristiques géométriques :

$$R_1 = 8\text{m} ; R_2 = 5\text{m} ; \alpha_1 = 58,56^\circ ; \alpha_2 = 76,44^\circ.$$

Les caractéristiques de résistance se limitent à :

$$N_0 = \sigma_0 e = 5\,375 \text{ kN/m}.$$

De ces paramètres, on déduit les valeurs des paramètres adimensionnels  $\lambda_i$ . On trouve :

$$\lambda_1 = 0,6997 ; \lambda_2 = 0,5708 ; \lambda_3 = 0,3758.$$

Suivant une méthode usuelle en calcul à la rupture, on va rechercher des chargements radiaux extrêmes sur des demi-droites de la forme  $(p_1, p_2) = k(c_1, c_2)$ . On détermine la valeur maximale  $k_{\max}$  de  $k$  telle que l'on ait  $N_i \leq N_0$  pour  $i = 1, 2, 3$  ; ceci ne pose pas de difficulté car les  $N_i$  sont proportionnels à  $k$ , le système étant isostatique. On en déduit un chargement extrême  $(p_1, p_2) = k_{\max}(c_1, c_2)$ .

On obtient finalement les résultats suivants :

$p_1(\text{kPa})$	672	613	560	460	320	190	0
$p_2(\text{kPa})$	0	153	280	460	639,5	761	763

Tableau 5-5 Chargements extrêmes en configuration déformée

On peut également représenter graphiquement la région du plan  $(p_1, p_2)$  correspondant à des chargements supportables.

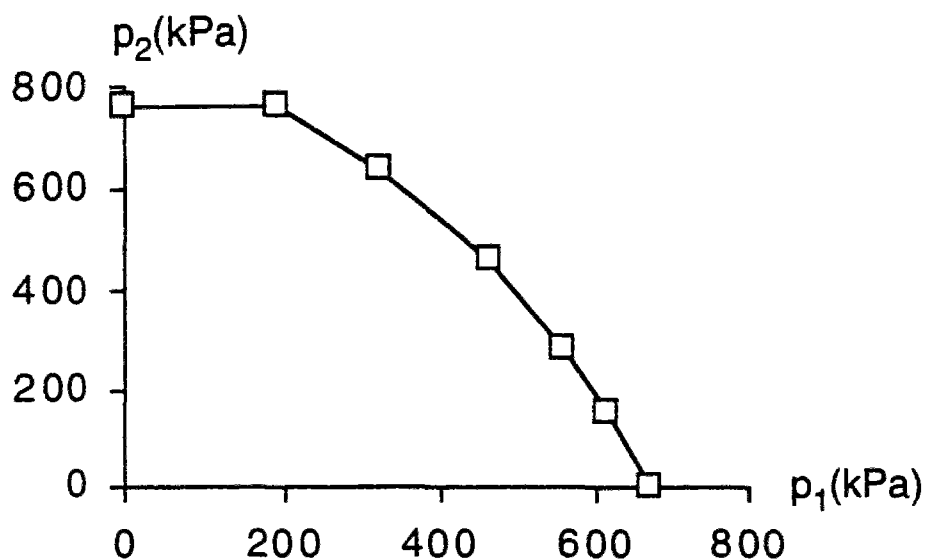


Figure 5-19 Représentation graphique des chargements supportables

La comparaison des résultats obtenus en géométrie initiale et en géométrie déformée montre une influence complètement différente de la pression dans l'arc de raccord. En configuration initiale, le système a une résistance très faible à une pression dans l'arc de raccord malgré des hypothèses très optimistes sur la résistance à la flexion de la coque. Si le système peut se déformer pour atteindre un équilibre membranaire, on obtient des résistances à la pression dans l'arc de raccord qui sont supérieures de plusieurs ordres de grandeur.

Ce cas  $p_1 \neq p_2$  peut servir à la construction d'une statique pour la gabionnade pour le cas où le remblai des cellules principale serait différent de celui des cellules de raccordement de manière analogue à ce qui a été fait dans le cas  $p_1 = p_2$  au 5.3.5.

On peut comparer le résultat ainsi obtenu à celui de la page 152. On voit alors que le domaine de résistance (ou du moins son approximation par l'intérieur que nous avons obtenue par la méthode statique) est extrêmement agrandi dans le cas où la gabionnade a pris une configuration d'équilibre membranaire par rapport au cas où elle est restée dans sa configuration géométrique initiale.

## 5.4 Prise en compte de la résistance des palplanches à la flexion longitudinale

On se propose d'étudier la possibilité de prendre en compte la résistance à la flexion longitudinale, comme cela a été fait dans l'étude statique du gabion isolé sous poids propre. Comme au chapitre 3, nous comparerons une statique prenant en compte la résistance à la flexion  $M_{zz}$ , par rapport à une statique ne la prenant pas en compte. Nous nous limiterons à un critère de résistance sans interaction de la forme  $\{|N_{\theta\theta}| \leq N_0 ; |M_{zz}| \leq M_0\}$  (on suppose alors  $M_{\theta\theta} = 0$ ), ou éventuellement un peu plus général de la forme  $\{f(N_{\theta\theta}, M_{\theta\theta}) \leq 0 ; |M_{zz}| \leq M_0\}$  si on prend en compte la résistance au moment fléchissant  $M_{\theta\theta}$ .

On étudiera d'abord le cas du gabion cloisonné (§5.4.1) puis des gabions circulaires en configuration déformée (§5.4.2) avec le critère  $\{|N_{\theta\theta}| \leq N_0 ; |M_{zz}| \leq M_0\}$ . Ensuite (§5.4.3), nous étudierons le cas des gabions circulaires en configuration initiale avec un critère plus général  $\{f(N_{\theta\theta}, M_{\theta\theta}) \leq 0 ; |M_{zz}| \leq M_0\}$ . Enfin (§5.4.4), nous donnerons des exemples numériques pour ces différents cas.

### 5.4.1 Cas des gabions cloisonnés

Le cas des gabions cloisonnés qui constituent un autre type de gabionnade se prête particulièrement bien à la prise en compte de la résistance à la flexion en appliquant les résultats obtenus pour le gabion isolé. L'équilibre membranaire est possible avec des chargements réalistes.

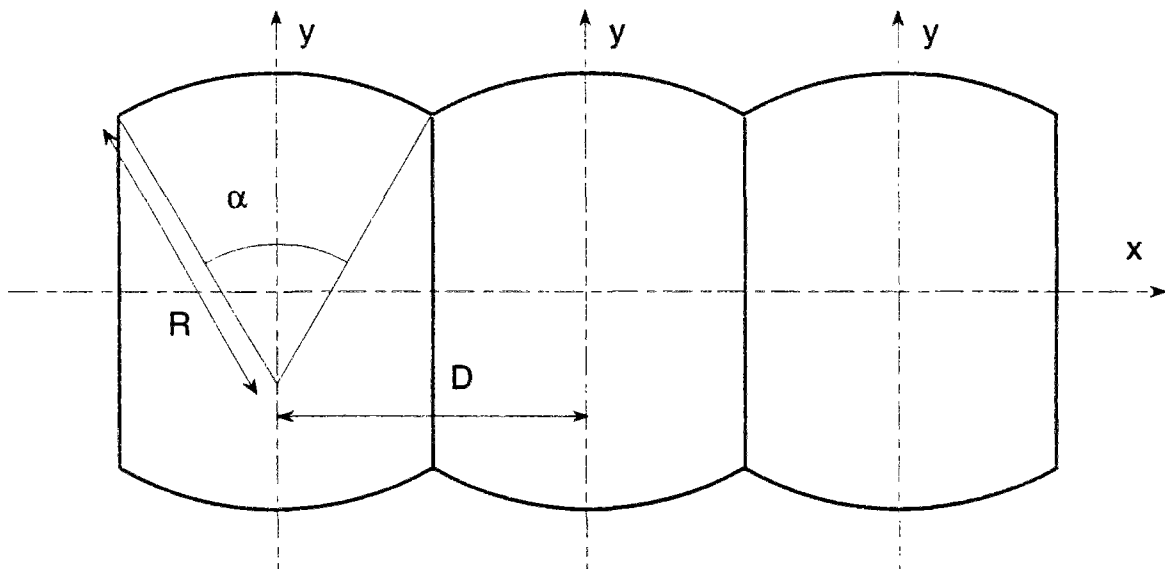


Figure 5-20 Gabions cloisonnés vus de dessus ; l'équilibre membranaire est possible

## Chapitre 5

Pour simplifier, on se limite au cas particulier  $\alpha = 60^\circ$ . Cette valeur de  $\alpha$  est fréquemment choisie car elle permet d'avoir l'équilibre si les tractions exercées au point de raccord sont toutes égales. On a alors :

$$R = D \quad (5-46)$$

On reprend la solution statique ne faisant pas intervenir la résistance à la flexion longitudinale utilisée au 5.3.5. :

- dans le remblai intérieur, on prend un champ de Rankine (on choisit l'axe vertical des  $z$  orienté vers le haut avec son origine au sommet de la gabionnade) :

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = \gamma z \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = K_a \gamma z \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \end{cases} \quad (5-47)$$

- dans l'enceinte de palplanches, on choisit la solution correspondant à l'équilibre membranaire. Il faut distinguer, pour être précis, le cas de l'arc (partie cylindrique) et le cas de la cloison (partie plane verticale séparant deux cellules adjacentes).

♦ Pour les arcs, en utilisant le système de coordonnées cylindriques adapté, on considère le champ statique suivant :

$$\begin{cases} N_{\theta\theta} = -RK_a \gamma z; N_{\theta z} = N_{zz} = 0 \\ \underline{M} = 0 \\ \underline{V} = 0 \end{cases} \quad (5-48)$$

♦ Pour les cloisons verticales, on considère le champ suivant :

$$\begin{cases} N_{yy} = -RK_a \gamma z; N_{yz} = N_{zz} = 0 \\ \underline{M} = 0 \\ \underline{V} = 0 \end{cases} \quad (5-49)$$

Les critères de résistance dans le remblai et dans l'enceinte de palplanches sont partout satisfaits sous réserve que :

$$RHK_a \gamma \leq N_0 \quad (5-50)$$

On considère maintenant le champ statique utilisé pour le gabion isolé :

$$\begin{cases} N_{\theta\theta} = N_0 n(z/H); N_{\theta z} = N_{zz} = 0 \\ M_{zz} = M_0 m(z/H); M_{\theta z} = M_{zz} = 0 \\ V_z = M_0 \int_z^1 m(z/H) dz; V_{\theta} = 0 \end{cases} \quad (5-51)$$

On a démontré que l'on peut trouver  $n(z/H)$  et  $m(z/H)$  satisfaisant les équations d'équilibre et les différentes conditions aux limites si :

$$\gamma R H K_a \leq f^+ \left( k = \frac{R M_0}{H^2 N_0} \right) N_0 \quad (5-52)$$

La fonction  $f^+$  a été déterminée pour le bord supérieur libre et pour trois conditions différentes sur le bord inférieur : libre (§2.2.16), simplement appuyé ou encastré (annexe B).

On choisit alors pour le remblai, le champ de Rankine (5-47), pour la partie cylindrique de l'enceinte de palplanches, le champ défini par (5-51) et pour les cloisons verticales, le champ défini comme suit :

$$\begin{cases} N_{yy} = -N_0 n(z/H); N_{yz} = N_{zz} = 0 \\ M = 0 \\ \underline{\underline{V}} = 0 \end{cases} \quad (5-53)$$

On vérifie que les conditions d'équilibre au raccord entre la partie cylindrique et la cloison verticales sont bien satisfaites : l'action sur le raccord d'une tranche de coque cylindrique ou de cloison verticale se ramène à une force horizontale dans le plan de la coque ou de la cloison et ces trois forces s'équilibrent.

En conclusion, dans le cas du gabion cloisonné avec  $\alpha=60^\circ$ , les résultats obtenus pour le gabion isolé sous poids propre s'étendent tels quels : il faut que la condition (5-52) soit vérifiée. Ceci permet d'améliorer la borne statique définie par (5-50) du facteur  $f^+$ .

#### **5.4.2 Cas des gabions circulaires en configuration d'équilibre membranaire**

On se place dans le cas d'une gabionnade libre à la base. On va considérer la configuration déformée qui découle de l'équilibre membranaire. Remarquons que le cas que nous allons étudier peut être considéré comme une généralisation du cas des gabions cloisonnés libres à la base.

### 5.4.2.1 Solution avec équilibre membranaire

Nous allons proposer une méthode permettant d'améliorer la borne statique fournie par l'équilibre membranaire suivant une démarche parallèle à celle utilisée pour les gabions cloisonnés. On prend donc comme point de départ l'équilibre membranaire.

- dans le remblai, on considère le champ de Rankine défini par ( 5-47).

- dans la coque, on choisit une solution membranaire construite d'après celle que nous venons d'étudier précédemment dans chaque arc ( $i=1, 2, 3$ ) :

$$\begin{cases} N_{\theta\theta} = C_i \gamma z; N_{\theta z} = N_{zz} = 0 \\ \underline{M} = 0 \\ \underline{V} = 0 \end{cases} \quad (5-54)$$

La constante  $C_i$  est choisie de la manière suivante pour  $i=1, 2$  :

$$C_i = r_i K_a \quad i = 1, 2 \quad (5-55)$$

La constante  $C_3$  est déterminée par :

$$C_3 = DK_a \quad (5-56)$$

La configuration adoptée par la structure est telle que les conditions d'équilibre au raccordement des coques sont satisfaites. Notons que pour chaque tranche, cette configuration en plan ne dépend pas de la pression et est donc identique sur toute la hauteur si la gabionnade est libre à la base.

On peut alors vérifier que les équations d'équilibre des coques sont satisfaites pour ce champ statique et cette configuration géométrique.

Partant de cette solution statique ne faisant pas intervenir la résistance à la flexion longitudinale, il faut rechercher le gain sur le majorant du chargement extrême que peut apporter cette résistance à la flexion.

Le chargement limite est déterminé par la condition :

$$C_i \gamma H \leq N_0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (5-57)$$

ce qui peut se récrire de la manière suivante :

$$\gamma \leq \frac{N_0}{H \sup(C_i, i = 1, 2, 3)} \quad (5-58)$$

On note  $\gamma_0$  le poids volumique maximal qu'on puisse équilibrer avec le champ de Rankine dans le remblai et l'équilibre membranaire dans l'enceinte de palplanches. On a :

$$\gamma_0 = \frac{N_0}{H \sup(C_i, i = 1, 2, 3)} \quad (5-59)$$

Les équations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \frac{N_{10}}{r_1} = -\gamma_0 K_a z \\ \frac{N_{20}}{r_2} = -\gamma_0 K_a z \\ \underline{N}_{10} + \underline{N}_{20} + \underline{N}_{30} = 0 \end{cases} \quad (5-60)$$

A ces équations, il faut ajouter les conditions aux limites en haut et en bas et bien sûr, les critères de résistance.

#### 5.4.2.2 Prise en compte de la résistance à la flexion longitudinale

On recherche si on peut trouver des champs  $N_1, N_2, N_3, M_1, M_2, M_3$  (les  $M_i$  sont des moments fléchissants «  $M_{zz}$  ») tels que les équations d'équilibre précédentes soient vérifiées pour un poids volumique  $\gamma_1 > \gamma_0$ . On a donc en prenant en compte des moments «  $M_{zz}$  » non nuls :

$$\begin{aligned} \frac{N_{11}}{r_1} + \frac{d^2 M_{11}}{dz^2} &= -\gamma_1 K_a z \\ \frac{N_{21}}{r_2} + \frac{d^2 M_{21}}{dz^2} &= -\gamma_1 K_a z \\ \underline{N}_{11} + \underline{N}_{21} + \underline{N}_{31} &= 0 \end{aligned} \quad (5-61)$$

On considère maintenant l'arc le plus chargé (entre  $l_1$  et  $l_2$ ) dans l'équilibre membranaire. C'est celui qui dans cet équilibre a le rayon le plus grand. Comme ces deux arcs jouent le même rôle, on peut supposer par exemple que c'est l'arc  $l_1$  qui est le plus chargé. On a donc  $r_1 > r_2$ .

On peut alors choisir pour l'arc  $l_1$ , la distribution d'effort normal et de moment fléchissant résultant de l'étude menée sur le gabion isolé sous poids propre.



## Chapitre 5

La première des trois équations du système ( 5-61) est vérifiée ainsi que le critère de résistance sur l'arc  $l_1$  les conditions aux limites sur le moment pour :

$$\gamma_1 = \frac{N_0}{r_1 H K_a} f^+ \left( k = \frac{r_1 M_0}{H^2 N_0} \right) \quad (5-62)$$

On choisit maintenant le champ d'effort normal dans l'arc  $l_2$  de la façon suivante :

$$N_{2_1}(z) = \frac{r_2}{r_1} N_{1_1}(z) \quad (5-63)$$

En substituant dans la deuxième équation de ( 5-61) la valeur de  $N_2$ , donnée par ( 5-63), on obtient :

$$\frac{N_{1_1}}{r_1} + \frac{d^2 M_{2_1}}{dz^2} = -\gamma_1 K_a z \quad (5-64)$$

En comparant cette équation ( 5-64) et la deuxième équation de ( 5-61), on conclut :

$$\frac{d^2 M_{1_1}}{dz^2} = \frac{d^2 M_{2_1}}{dz^2} \quad (5-65)$$

Compte tenu des conditions aux limites (bord supérieur libre), on déduit :

$$M_{1_1}(z) = M_{2_1}(z) \quad (5-66)$$

Prenant en compte ( 5-63) et ( 5-66) avec  $R_2/R_1 < 1$ , on conclut que si le critère  $|M| < M_0$  et  $|N| < N_0$  est vérifié pour  $l_1$ , c'est aussi vrai pour  $l_2$ .

Enfin, la condition d'équilibre au raccord (troisième équation de ( 5-61)) va déterminer l'effort normal dans  $l_3$ . Comme la configuration géométrique est celle de l'équilibre membranaire, que le rapport des efforts normaux dans  $l_1$  et dans  $l_2$  est constant sur la hauteur et égal à sa valeur dans le cas de l'équilibre membranaire, on en déduit que le rapport des efforts normaux dans  $l_1$  et dans  $l_3$  est lui aussi constant sur la hauteur et égal à sa valeur dans le cas de l'équilibre membranaire.

On peut finalement écrire l'expression suivante (qui est indépendante du point  $z_1$ ) :

$$N_{3_1}(z) = \frac{N_{3_0}(z_1)}{N_{1_0}(z_1)} N_{1_1}(z) = \frac{C_3}{C_1} N_{1_1}(z) \quad (5-67)$$

On choisit par ailleurs :

$$M_{3_1}(z) = 0 \quad (5-68)$$

Il faut maintenant distinguer deux cas :

$$\begin{array}{c} C_3/C_1 \leq 1 \\ \text{ou} \\ C_3/C_1 \geq 1 \end{array}$$

Si on est dans le premier cas, on conclut de (5-67) que, si le critère de résistance est satisfait pour l'arc  $l_1$ , il l'est aussi pour l'arc  $l_3$ . On a donc construit un champ statique permettant d'équilibrer le chargement  $\gamma_1$  défini par (5-62). Compte tenu des hypothèses faites, on a  $\sup(C_i) = C_1$ . On conclut alors que la prise en compte de la résistance à la flexion longitudinale a permis de multiplier la borne inférieure  $\gamma_0$  du chargement supportable obtenue par l'équilibre membranaire par le facteur  $f$  résultant de l'étude du gabion isolé.

Si on est dans le deuxième cas, on considère les distributions suivantes d'effort normal et de moment :

$$\left\{ \begin{array}{l} N'_{1_1} = \frac{C_1}{C_3} N_{1_1}; M'_{1_1} = \frac{C_1}{C_3} M_{1_1} \\ N'_{2_1} = \frac{C_1}{C_3} N_{2_1}; M'_{2_1} = \frac{C_1}{C_3} M_{2_1} \\ N'_{3_1} = \frac{C_1}{C_3} N_{3_1}; M'_{3_1} = 0 \end{array} \right. \quad (5-69)$$

Ces distributions vérifient les équations d'équilibre et les conditions aux limites ; les critères de résistance qui étaient vérifiés pour les distributions  $N_{1_1}, M_{1_1}, N_{2_1}, M_{2_1}$  sont encore satisfaits pour les distributions  $N'_{1_1}, M'_{1_1}, N'_{2_1}, M'_{2_1}$ . On vérifie aussi facilement que  $N'_{3_1}$  satisfait aussi le critère de résistance. On conclut que l'on a construit dans ce cas, un champ statique équilibrant le chargement  $\gamma'_1 = (C_1/C_3)\gamma_1$ . Compte tenu des hypothèses faites, on a  $\sup(C_i) = C_3$ . On conclut à nouveau que la prise en compte de la résistance à la flexion longitudinale a permis de multiplier la borne inférieure  $\gamma_0$  du chargement supportable obtenue par l'équilibre membranaire par le facteur  $f^+$  résultant de l'étude du gabion isolé appliqué à l'arc circulaire de rayon le plus grand en configuration déformée.

### 5.4.2.3 Conclusion

La prise en compte de la résistance à la flexion a permis d'améliorer la borne inférieure des chargements supportables  $\gamma_0$  définie par (5-59) et d'aboutir à la borne suivante  $\gamma_2$  :

$$\gamma_2 = \gamma_0 f^+ \left( \frac{RM_0}{H^2 N_0} \right) \text{ avec } R = \sup(r_1, r_2) \quad (5-70)$$

### 5.4.3 Cas des gabions circulaires en géométrie initiale

On s'intéresse maintenant aux gabions cellulaires en géométrie initiale. Notre démarche va être maintenant un peu plus générale que dans les deux cas précédents (gabions cloisonnés, gabions en configuration géométrique d'équilibre membranaire). Nous allons supposer une solution statique d'un certain type dans le remblai et dans l'enceinte de palplanches sans en préciser la forme exacte. Nous supposerons notamment que cette solution statique de départ ne fait pas intervenir la résistance à la flexion longitudinale, la résistance à la flexion longitudinale n'intervenant dans le critère de résistance que par une condition  $|M_{zz}| \leq M_0$ . On continue à supposer que l'effort tranchant n'intervient pas dans le critère de résistance.

On suppose que la solution statique (champ  $\underline{\sigma}_0$  dans le remblai, distribution d'effort normal  $\underline{N}_{zz_0}$  et de moment fléchissant  $\underline{M}_{zz_0}$ ) permet d'équilibrer une masse volumique du remblai  $\gamma_0$ . On cherche à construire à partir de cette solution statique, une solution statique permettant d'équilibrer un chargement  $\gamma = f \gamma_0$ .

Nous allons faire des hypothèses complémentaires sur la solution statique équilibrant le poids volumique  $\gamma_0$ . Nous allons supposer que les efforts sont proportionnels à  $(z-H)$ , l'origine des  $z$  étant au sommet de la gabionnade.

On a donc :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_0 &= (1-u)\underline{\sigma}_0(u=0) \\ \underline{N}_0 &= (1-u)\underline{N}_0(u=0) \\ \underline{M}_0 &= (1-u)\underline{M}_0(u=0) \\ \underline{V}_0 &= (1-u)\underline{V}_0(u=0) \end{aligned} \quad (5-71)$$

avec :

$$u = \frac{z}{H} \quad (5-72)$$

## Étude statique de la gabionnade

On suppose de plus que :

$$\begin{aligned} N_{\theta z_0} &= N_{z\theta_0} = 0 \\ M_{\theta z_0} &= M_{z\theta_0} = M_{zz_0} = 0 \end{aligned} \quad (5-73)$$

et que la force exercée par le remblai sur l'enceinte de palplanches est normale à cette enceinte pour la solution statique de départ comme ce serait nécessairement le cas si l'interface coque/remblai était lisse. Il s'agit donc d'une pression qui s'écrit donc sous la forme suivante :

$$p_0(u, \theta) = (1 - u)p_0(u = 1, \theta) \quad (5-74)$$

Nous allons maintenant construire une solution statique susceptible d'équilibrer un poids volumique du remblai  $\gamma = f\gamma_0$  avec  $f > 1$ .

A cet effet, on considère dans le remblai le champ suivant :

$$\underline{\underline{\sigma}} = f\underline{\underline{\sigma}}_0 \quad (5-75)$$

Ce champ satisfait les équations d'équilibre, les conditions aux limites et le critère de résistance de Coulomb pour le poids volumique  $\gamma$  si  $\underline{\underline{\sigma}}_0$  satisfait ces mêmes conditions pour le poids volumique  $\gamma_0$ .

Il faut maintenant construire un champ statique dans la coque. On va chercher  $M_{\theta\theta}$ ,  $M_{zz}$ ,  $N_{\theta\theta}$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} N_{\theta\theta} &= n(u)N_{\theta\theta_0}(u = 1) \\ M_{\theta\theta} &= n(u)M_{\theta\theta_0}(u = 1) \\ M_{zz} &= m(u)M_0 \frac{p_0(u = 1, \theta)}{\sup(p_0(u, \theta) / u = 1)} \end{aligned} \quad (5-76)$$

Les autres termes sont choisis nuls.

On rappelle les équations à satisfaire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + V_{\theta} &= 0 \\ \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + R V_{\theta} &= 0 \\ \frac{\partial M_{zz}}{\partial z} + V_z &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} + p &= 0 \end{aligned} \quad (5-77)$$

## Chapitre 5

Compte tenu que la solution statique de départ satisfait le système ci-dessus, on en déduit que les deux premières équations sont satisfaites, la troisième détermine la valeur de  $V_z$ . Finalement, il suffit de récrire la quatrième équation de la manière suivante :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 N_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} + \frac{\partial^2 M_{zz}}{\partial z^2} + p = 0 \quad (5-78)$$

On utilise maintenant les choix faits en (5-76). L'équation ci-dessus se récrit :

$$\frac{n(u)}{R} \left( \frac{\partial^2 N_{\theta\theta_0}(u=1)}{\partial \theta^2} - \frac{N_{\theta\theta_0}(u=1)}{R} \right) + \frac{M_0}{H^2} \frac{p_0}{\sup(p_0(u,\theta)/u=1)} \frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + f(1-u)p_0(u=1) = 0 \quad (5-79)$$

Cette équation est aussi vérifiée pour la solution statique de départ (il faut faire  $n(u)=1-u$ ,  $m(u)=0$  et  $f=1$ ). Ceci nous donne la relation suivante :

$$\frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 N_{\theta\theta_0}(u=1)}{\partial \theta^2} - \frac{N_{\theta\theta_0}(u=1)}{R} \right) = -f(1-u)p_0(u=1) \quad (5-80)$$

En éliminant  $N_{\theta\theta_0}$  dans (5-79) grâce à (5-80), on obtient :

$$-n(u) + \frac{M_0}{H^2} \frac{1}{\sup(p_0(u,\theta)/u=1)} \frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + f = 0 \quad (5-81)$$

Il faut trouver  $m(u)$  et  $n(u)$  satisfaisant l'équation ci-dessus avec les conditions aux limites sur  $m$ . On impose de plus les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} |n(u)| &\leq 1 \\ |m(u)| &\leq 1 \end{aligned} \quad (5-82)$$

La première des deux conditions garantit que le critère en  $(N_{\theta\theta}, M_{\theta\theta})$  est satisfait. La deuxième condition permet de s'assurer que le critère  $|M_{zz}| \leq M_0$  est également satisfait.

L'équation (5-81) avec les conditions (5-82) que nous venons d'écrire est identique à celle obtenue pour l'étude de l'effet de la résistance à la flexion longitudinale pour le cas du gabion isolé.

On peut donc construire un champ statique équilibrant un poids volumique  $\gamma_1 = f \gamma_0$ . Le nombre  $f$  est une fonction des données du problème et de la solution statique de départ :

$$f = f^+ \left( \frac{M_0}{H^2} \frac{1}{\sup(p_0(u,\theta)/u=1)} \right) \quad (5-83)$$

Cette fonction est celle déterminée dans l'étude du gabion isolé. Il y en fait trois fonctions suivant le type de la condition aux limites à la base.

On note que le type de statique construit précédemment pour la gabionnade circulaire en configuration initiale satisfait toutes les conditions pour que l'on puisse lui appliquer le résultat ci-dessus.

### 5.4.4 Exemples numériques

On étudie les cas suivants :

gabionnade cloisonnée :

$R=8\text{m}$  ;  $H=15\text{m}$ .

gabionnade circulaire ayant comme configuration initiale :

$R_1=8\text{m}$  ;  $R_2=5\text{m}$  ;  $H=15\text{m}$  ;  $\alpha_1 = 58,56^\circ$  ;  $\alpha_2 = 76,44^\circ$ .

Nous retenons les caractéristiques mécaniques suivantes :

$N_0 = 5375 \text{ kN/m}$  ;  $M_{zz_0} = 91,34 \text{ kN.m/m}$

Pour la gabionnade cloisonnée, on détermine le facteur  $k = \frac{RM_0}{H^2 N_0}$ . On trouve

$k=0,0006042$ . On détermine ensuite l'amélioration par rapport à une statique simple ne prenant pas en compte la résistance à la flexion :

- 10,3 %      pour le bord libre
- 24,4 %      pour le bord appuyé
- 28,9 %      pour le bord encastré

Pour la gabionnade circulaire en configuration déformée, il faut évaluer les rayons déformés  $r_1$ ,  $r_2$  et  $D$ . On trouve :  $r_1 = 8,177\text{m}$   $r_2 = 6,670\text{m}$  et  $D = 11,686\text{m}$ . On en déduit la valeur de  $k=0,0006176$ . On détermine ensuite l'amélioration par rapport à une statique simple ne prenant pas en compte la résistance à la flexion :

- 10,4 %      pour le bord libre

L'interprétation des résultats pour la gabionnade circulaire en configuration déformée avec le bord libre ou encastré serait plus délicate puisque ces conditions aux limites ne sont pas compatibles strictement avec le changement de géométrie que nous avons étudié.

## Chapitre 5

Etudions maintenant le cas de la gabionnade en configuration initiale. Nous utiliserons les mêmes données que pour l'exemple numérique en configuration initiale que nous venons de traiter.

La valeur maximale de la pression pour la statique que nous avons déterminée (Tableau 5-4) est :

$$\sup(p_0)=1,72 \text{ kPa.}$$

On a donc un paramètre  $k$  qui vaut :

$$k = \frac{M_0}{H^2} \frac{1}{\sup(p_0(u, \theta) / u = 1)} = 0,236$$

On trouve comme amélioration par rapport à la statique simple ne prenant pas en compte la résistance à la flexion :

- 44% pour le bord libre
- 200% pour le bord appuyé
- 346% pour le bord encastré

Soulignons toutefois que ces pourcentages élevés s'appliquent à une valeur de départ très faible.

### 5.5 Récapitulatif

Nous avons été amené à utiliser divers types de champs statiques qui sont rappelés dans le tableau ci-dessous :

Efforts pris en compte	Géométrie	Références	Remarques
$N_{\theta\theta}, M_{\theta\theta}$	Gabions circulaires en configuration initiale	§5.2	
$N_{\theta\theta}$	Gabions circulaires en configuration déformée	§5.3	Les gabions cloisonnés constituent un cas particulier
$N_{\theta\theta}, M_{zz}$	Gabions cloisonnés	§5.4.1	
$N_{\theta\theta}, M_{zz}$	Gabions circulaires en configuration déformée	§5.4.2	
$N_{\theta\theta}, M_{\theta\theta}, M_{zz}$	Gabions circulaires en configuration initiale	§5.4.3	Les résultats du 5.4.3 sont basés sur la donnée préalable d'une statique ne faisant pas intervenir $M_{zz}$ (par exemple celle définie au §5.2)

Tableau 5-6 Types d'efforts pris en compte dans l'étude statique de la gabionnade

Nous ne connaissons pas de travaux antérieurs ayant appliqué la méthode statique du calcul à la rupture à une gabionnade. Une comparaison peut être effectuée avec certains résultats d'études actuellement en cours (J.-M. Locci) ; ceux-ci utilisent notamment une modélisation élastoplastique d'une tranche horizontale de coque soumise à des pressions internes. Cette modélisation confirme sur des exemples numériques les résultats obtenus en §5.2 et §5.3.

Le fait que nous n'ayons pas réussi à construire pour la gabionnade circulaire en configuration initiale une statique permettant de reprendre des chargements de l'ordre de grandeur des chargements réels peut être rapproché du fait suivant, apparu dans une étude appliquant la méthode des éléments finis à une tranche de gabionnade. Cette étude (Kuppusamy et al., 1985) a rencontré la difficulté suivante : les résultats concernant la palplanche de raccord étaient erratiques. Ce problème a été résolu en utilisant une formulation en grands déplacements. La nécessité de prendre en compte des changements de géométrie pour pouvoir déterminer un champ statique est également corroborée par certains autres résultats (J.-M. Locci) .

La gabionnade circulaire en configuration déformée (équilibre membranaire) ou une gabionnade cloisonnée se prête beaucoup mieux à la construction d'une solution statique permettant de reprendre les chargements auxquels sont soumis les ouvrages réels. Toutefois, l'adoption de la géométrie de l'équilibre membranaire n'est pas observée dans la réalité pour les gabionnades circulaires. D'après des travaux en cours, il suffirait d'un angle de frottement interne très faible du remblai, de l'ordre de  $1^\circ$ , pour empêcher ce changement global de géométrie.

Il a été possible d'adapter les résultats du chapitre 3, à tous les cas de statiques que nous avons envisagés. On aboutit ainsi, en prenant en compte la résistance à la flexion  $M_{zz'}$ , à améliorer la borne statique qui avait été obtenue sans prendre en compte cette résistance à la flexion.





## 6. Étude cinématique de la gabionnade

Nous allons maintenant appliquer la méthode cinématique du calcul à la rupture à l'étude de la gabionnade. Nous commencerons par rappeler le seul travail antérieur existant à notre connaissance (§6.1). La comparaison des résultats de l'étude statique de la gabionnade en configuration initiale d'une part et des résultats obtenus par l'étude statique de la gabionnade en configuration déformée invite à essayer de mettre en évidence par la méthode cinématique la faible stabilité en configuration initiale. Pour cela, une idée assez naturelle est de rechercher des mécanismes ne faisant pas jouer l'effort normal (§6.2). Ces mécanismes peuvent être inspirés par l'étude statique de la gabionnade en configuration initiale. L'étude sera limitée au cas où le remblai est constitué d'un matériau purement cohérent, l'interface remblai/substratum étant supposée lisse, le bord inférieur de la coque étant supposé libre.

Nous reviendrons ensuite au cas normal d'un remblai constitué de matériau frottant, mais cette fois avec des mécanismes faisant jouer la résistance à l'effort normal de la coque. Nous aborderons le problème de la gabionnade sous poids propre dans deux hypothèses pour l'interface remblai/substratum :

- interface lisse, le bord inférieur de la coque étant libre (§6.3)
- interface frottante, le bord inférieur pouvant être libre, simplement appuyé ou encastré (§6.4)

Ces mécanismes faisant jouer l'effort normal seront étudiés pour les configurations initiales mais ils pourraient sans difficulté particulière être appliqués aux configurations en équilibre membranaire.

Dans le cas de l'interface frottante, le mécanisme envisagé est adapté à la prise en compte de la présence d'un remblai frottant extérieur (utilisation de la gabionnade comme quai). Nous pourrions ainsi étudier l'effet de la présence d'un remblai extérieur pesant sur la stabilité de la gabionnade.

### 6.1 Travaux antérieurs

Le rapport Buhan-Dormieux-Maghous de 1992 semble être l'unique travail antérieur appliquant la méthode cinématique à une gabionnade en prenant en compte sa géométrie réelle. Rappelons toutefois l'utilisation de la méthode cinématique par Ovesen (1962) dans le cas de la modélisation de la gabionnade par un double rideau. Le tableau suivant résume les hypothèses faites dans le rapport de 1992.

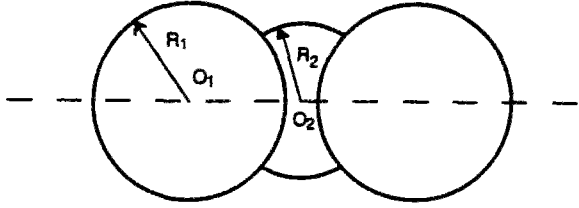
<b>géométrie</b>	gabions circulaires avec centre des cellules de raccord sur l'axe de symétrie de la gabionnade 
<b>critères de résistance</b> palplanches	$0 \leq N_{\theta\theta} \leq N_0$ $ N_{\theta z}  \leq f N_{\theta\theta}$
remblai	critère de Coulomb sans cohésion d'angle de frottement interne $\varphi$
interface remblai/palplanches	lisse sans résistance à la traction
interface remblai/substratum	purement frottant d'angle $\delta_{rs}$
substratum	rigide
<b>prise en compte de l'eau</b>	cas d'une différence de niveau de la surface libre entre l'intérieur et l'extérieur sans écoulement
<b>forces extérieures</b>	poids propre en configuration « digue » et en configuration « quai » (avec remblai extérieur)

Tableau 6-1 Cadre d'hypothèses du rapport Buhan-Dormieux-Maghous (1992)

Les cinématiques envisagées dans ce rapport sont des cinématiques par blocs dans le remblai et dans la coque.

## 6.2 Étude cinématique d'un mécanisme ne faisant pas jouer l'effort normal pour un remblai purement cohérent

### 6.2.1 Choix d'une cinématique dans la coque

On recherche une cinématique dans la coque ne faisant pas intervenir la résistance à l'effort normal. On peut utiliser pour cela certains résultats obtenus lors de l'étude statique de la gabionnade.

On cherche une cinématique ayant les mêmes symétries que la gabionnade. Alors, la direction de la vitesse de la coque aux points  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  (Figure 6-1) est déterminée compte tenu que l'on ne veut pas d'allongement de la coque (qui se traduirait par une discontinuité des vitesses en ces points).

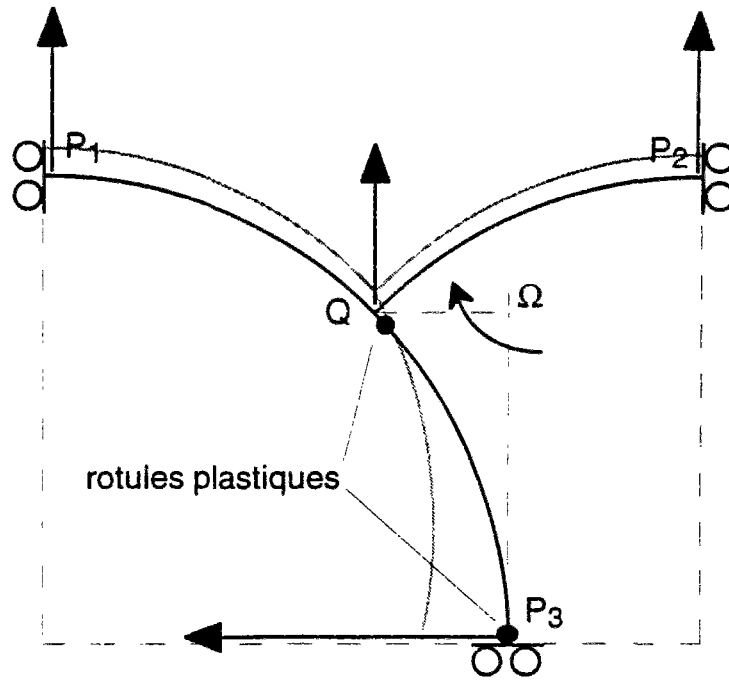


Figure 6-1 Cinématique de la coque avec « déformée » en grisé

On va retenir une cinématique simple où l'arc  $P_1QP_2$  est en translation et l'arc  $QP_3$  est en rotation. Alors le centre de rotation  $\Omega$  est situé à l'intersection des perpendiculaires à la vitesse en  $P_3$  et en  $Q$ .

Il y a finalement deux rotules plastiques : une en  $Q$  et une en  $P_3$ . Le reste de la coque se comporte comme un corps rigide. Cette cinématique ne fait donc intervenir que la résistance à la composante  $M_{\theta\theta}$  du moment fléchissant de la coque.

Dans la suite, nous négligerons la puissance résistante maximale due à cette composante du moment fléchissant vis à vis de la puissance résistante maximale du remblai. Nous vérifierons que cette hypothèse est en général tout à fait justifiée.

### 6.2.2 Construction d'un champ de vitesse dans le remblai situé dans l'arc principal

Nous allons maintenant supposer que la coque est libre à la base, que l'interface remblai/substratum est lisse et que l'interface remblai/palplanches est lisse.

On se propose donc de construire un champ de vitesse dans la partie du remblai situé dans l'arc principal. Ce champ de vitesse devra être pertinent pour le critère de Tresca. On va rechercher ce champ de vitesse comme celui d'un certain nombre de blocs rigides qui suivent la coque dans ses déplacements. Il faut

donc un bloc  $B_1$  en translation avec l'arc  $P_1Q$  et un bloc  $B_2$  en rotation avec l'arc  $QP_3$ .

Mais une telle disposition n'est pas pertinente le long de  $OP_3$ . Il faut pour cela ajouter un troisième bloc  $B_3$  qui sera en translation (Figure 6-2).

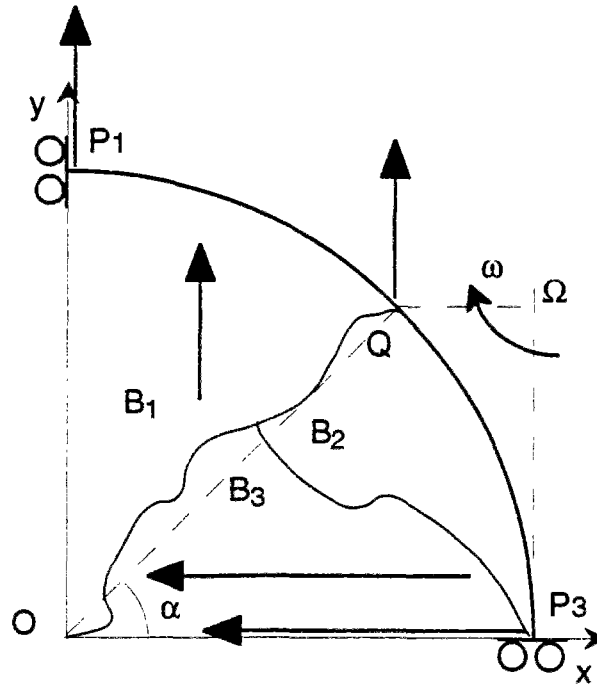


Figure 6-2 Deux blocs en translation ( $B_1$  et  $B_3$ ) et un bloc en rotation  $B_2$ .

Il faut maintenant déterminer, si elle existe, la forme de la frontière telle que les discontinuités de vitesse soient tangentes à la frontière, ce qui est la condition de pertinence pour le critère de Tresca.

#### Détermination de la frontière entre les blocs $B_2$ et $B_3$

Commençons donc par déterminer la frontière entre les blocs  $B_2$  et  $B_3$ . On pose  $R$  le rayon de la cellule principale. Le point  $\Omega$  a pour coordonnées  $(R, R\sin\alpha)$ . On désigne par  $\omega$  la vitesse de rotation du bloc  $B_2$  autour du point  $\Omega$ . Introduisons les variables adimensionnelles suivantes :

$$X = \frac{x}{R}; Y = \frac{y}{R}; \underline{u} = \frac{U}{-\omega R} \quad (6-1)$$

## Étude cinématique de la gabionnade

La vitesse d'un point du bloc B<sub>2</sub> s'écrit :

$$\underline{U}_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x-R \\ y-R\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} R\sin\alpha - y \\ x-R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6-2)$$

En utilisant les variables adimensionnelles définies ci-dessus, on peut écrire :

$$\underline{u}_2(X,Y) = \begin{pmatrix} Y - \sin\alpha \\ 1-X \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6-3)$$

On calcule maintenant  $\underline{u}_2 - \underline{u}_3$ .

$$\underline{u}_2 - \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} Y - \sin\alpha - u_3 \\ 1-X \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6-4)$$

On écrit maintenant le système différentiel caractérisant les lignes partout tangentes au champ  $\underline{u}_2 - \underline{u}_3$ .

$$(\underline{u}_2 - \underline{u}_3) \wedge \underline{t} = \begin{pmatrix} Y - \sin\alpha - u_3 \\ 1-X \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-X)dZ \\ -(Y - \sin\alpha - u_3)dZ \\ (1-X)dX - (Y - u_3 - \sin\alpha)dY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6-5)$$

Ce système se résout comme suit :

$$\begin{cases} Z = \text{Cte} \\ (X-1)^2 + (Y - u_3 - \sin\alpha)^2 = \rho^2 \end{cases} \quad (6-6)$$

Dans un plan horizontal, la trace de la frontière de B<sub>2</sub> et de B<sub>3</sub> est donc un cercle de centre A de coordonnées (1, sinα+u<sub>3</sub>) et de rayon ρ. On demande que ce cercle passe par les points P<sub>3</sub>(1,0) et Q(cosα, sinα). En reportant dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{cases} (u_3 + \sin\alpha)^2 = \rho^2 \\ (\cos\alpha - 1)^2 + u_3^2 = \rho^2 \end{cases} \quad (6-7)$$

En soustrayant membre à membre les deux équations du système ci-dessus, on obtient  $u_3$  puis  $\rho$  :

$$\begin{aligned} \underline{u}_3 &= \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} \cos \alpha \underline{e}_x \\ \rho &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned} \quad (6-8)$$

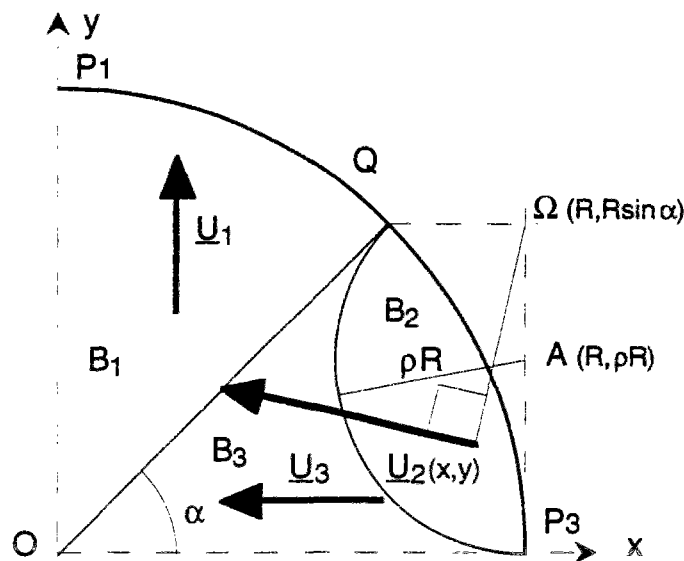


Figure 6-3 Forme des blocs

### Etude des conditions à la frontière entre les blocs $B_1$ et $B_3$

Déterminons maintenant la frontière entre les blocs  $B_1$  et  $B_3$ . En prenant la même démarche que précédemment, on écrit que la discontinuité des vitesses entre ces deux blocs en translation doit être tangente à la frontière. On trouve alors que cette frontière est une droite. Comme il faut que cette droite passe par les points  $O$  et  $Q$ , cette frontière est entièrement déterminée, ainsi que la vitesse  $U_1$  du bloc  $B_1$ . On trouve :

$$u_1 = \tan \alpha \quad u_3 = 1 - \cos \alpha \quad (6-9)$$

On choisit alors  $u_1$  (respectivement  $u_2$ ) comme vitesse de la partie de la coque adjacente à  $B_1$  (respectivement  $B_2$ ). On vérifie qu'il n'y a pas de discontinuité de la vitesse de la coque au point Q :

$$\underline{u}_2(X = \cos \alpha, Y = \sin \alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \cos \alpha \end{pmatrix} = \underline{u}_1 \quad (6-10)$$

### 6.2.3 Construction du champ de vitesse dans le remblai de l'arc de raccord

Il faut maintenant construire le champ de vitesse dans le remblai situé dans l'arc principal. C'est le poids de ce remblai qui doit rendre positive la puissance des forces extérieures. On ne peut plus se contenter de blocs en translation horizontale et nous allons ajouter une zone en déformation.

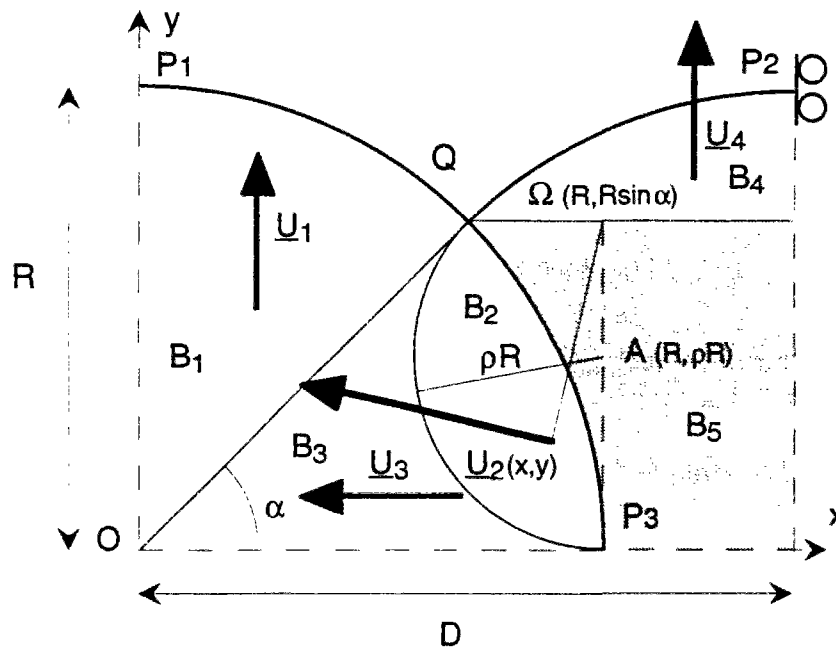


Figure 6-4 Champ de vitesse dans le remblai de l'arc secondaire

On définit deux zones  $B_4$  et  $B_5$  dans l'arc secondaire : dans la zone  $B_4$ , on a  $Y \geq \sin \alpha$  et dans  $B_5$ ,  $Y \leq \sin \alpha$ . Il est naturel de prendre dans la zone  $B_4$  un mouvement de translation de vitesse :

$$\underline{u}_4 = \underline{u}_1 = (1 - \cos \alpha) \underline{e}_y \quad (6-11)$$

Dans la zone  $B_5$ , nous allons choisir un champ de déformation défini par :

$$\underline{u}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Y}{\sin \alpha} (1 - \cos \alpha) \\ -GZ \end{pmatrix} \quad (6-12)$$



## Chapitre 6

Le choix de la composante selon  $y$ , permet d'assurer que la discontinuité de vitesse avec le bloc  $B_4$  est pertinente. La condition de pertinence du champ de déformation est  $\text{div}(\underline{u}_5)=0$ , ce qui nous donne la valeur de la constante  $G$  :

$$G = \frac{(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} \quad (6-13)$$

Il faut enfin vérifier la condition de non pénétration à l'interface avec la partie  $QP_3$  de la coque de palplanches. On a :

$$(\underline{u}_5 - \underline{u}_2)(\cos \beta, \sin \beta) = \begin{pmatrix} (\sin \alpha - \sin \beta) \\ (1 - \cos \alpha) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - (1 - \cos \beta) \\ -GZ \end{pmatrix} \quad (6-14)$$

La condition de non pénétration s'écrit :

$$(\underline{u}_5 - \underline{u}_2) \cdot \underline{n} \geq 0 \quad (6-15)$$

ce qu'on récrit le long de  $QP_3$  :

$$\cos \beta (\sin \alpha - \sin \beta) + \sin \beta \left( (1 - \cos \alpha) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - (1 - \cos \beta) \right) \geq 0 \quad (6-16)$$

La quantité ci-dessus est positive car somme de deux quantités positives pour  $\pi/2 \geq \alpha \geq \beta \geq 0$ . En effet la fonction sinus est croissante sur cet intervalle ainsi que la fonction suivante :

$$x \rightarrow \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad (6-17)$$

comme l'examen de la dérivée permet de s'en convaincre.

### 6.2.4 Calcul de la puissance résistante maximale du remblai

On note  $C$  la cohésion du matériau de Tresca. On rappelle (Salençon, 1983) que pour une discontinuité de vitesse pertinente (c'est à dire dans ce cas, une discontinuité tangente à la surface de discontinuité), on a la densité surfacique de puissance résistante maximale suivante :

$$\pi(\underline{n}, [[\underline{U}]])) = C |\underline{U}| \text{ si } \underline{U} \cdot \underline{n} = 0 \quad (6-18)$$

Nous allons commencer par calculer la puissance résistante maximale due aux discontinuités.

Entre les blocs  $B_1$  et  $B_3$  , la discontinuité de vitesse s'écrit :

$$|\underline{u}_1 - \underline{u}_3| = \sin \alpha u_1 + \cos \alpha u_3 = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (6-19)$$

On en déduit la contribution  $P_{rm1,3}$  de cette discontinuité à la puissance résistante maximale, en prenant  $\omega \geq 0$  :

$$P_{rm1,3} = \omega C H R^2 \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (6-20)$$

Entre les blocs  $B_1$  et  $B_2$  la discontinuité s'écrit en adoptant un paramétrage ad hoc pour le cercle de rayon  $\rho$  et de centre  $A$  (Figure 6-5) :

$$|\underline{u}_2 - \underline{u}_3|(X = 1 - \rho \sin \theta, Y = \rho(1 - \cos \theta)) = \rho \quad (6-21)$$

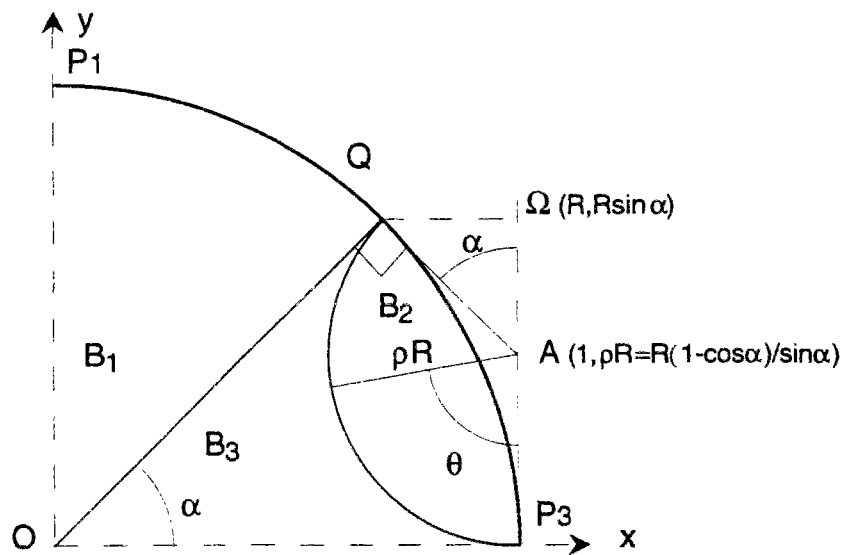


Figure 6-5 Étude de la discontinuité entre  $B_2$  et  $B_3$

## Chapitre 6

Il faut calculer la longueur de cet arc de cercle frontière entre  $B_2$  et  $B_3$ . Le point  $P_3$  correspond à  $\theta=0$  ; on vérifie que le point  $Q$  correspond à  $\theta=\pi-\alpha$ . On peut maintenant écrire la valeur de la puissance résistante maximale associée à cette discontinuité :

$$P_{rm2,3} = \omega C H R^2 (\pi - \alpha) \left( \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \quad (6-22)$$

Calculons maintenant la discontinuité de vitesse entre les blocs  $B_4$  et  $B_5$  qui est purement verticale :

$$|u_5 - u_4| (Y = \cos \alpha) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} Z \quad (6-23)$$

On en déduit ensuite la puissance résistante maximale correspondante :

$$P_{rm4,5} = \omega C \frac{H^2}{2} (D - R \cos \alpha) \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (6-24)$$

Enfin, il reste à déterminer la puissance résistante maximale correspondant à la déformation du bloc  $B_5$ . Calculons le tenseur de vitesse de déformation de ce bloc :

$$\underline{\underline{d}} = \omega \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6-25)$$

On rappelle que la densité de puissance résistante maximale pour un matériau de Tresca (Salençon, 1983) s'écrit :

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = C(|d_1| + |d_2| + |d_3|) \text{ pour } \text{tr}(\underline{\underline{d}}) = 0 \quad (6-26)$$

On obtient donc dans notre cas :

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = 2\omega C \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (6-27)$$

Il faut maintenant évaluer l'aire de  $B_5$  (Figure 6-6).

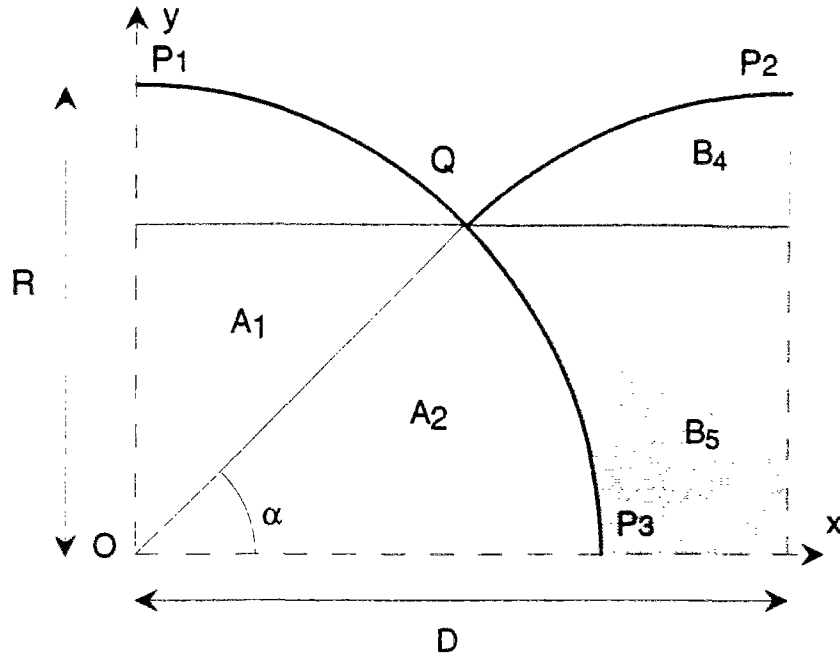


Figure 6-6 Calcul de l'aire  $B_5$

Cette aire  $S$  se détermine comme celle du rectangle de côtés de longueur  $R\sin\alpha$  et  $D$ , diminuée de celle des zones  $A_1$  et  $A_2$ . On trouve :

$$S = DR\sin\alpha - \frac{R^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{R^2}{2}\alpha \quad (6-28)$$

On peut maintenant écrire la puissance résistante maximale  $P_{rm5}$  :

$$P_{rm5} = 2\omega CH \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \left( DR\sin\alpha - \frac{R^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{R^2}{2}\alpha \right) \quad (6-29)$$

### 6.2.5 Calcul de la puissance des efforts extérieurs.

Cette puissance des efforts extérieurs se réduit au travail du poids propre dans le champ de déformation de  $B_5$ .

$$P_e = \int_{B_5} \gamma \underline{U}_5 \cdot \underline{e}_z d\Omega \quad (6-30)$$

Dans notre cas, on trouve :

$$P_e = \int_{B_5} \omega R \gamma \frac{1-\cos\alpha}{R\sin\alpha} z d\Omega = \gamma \omega \frac{H^2}{2} \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \left( DR\sin\alpha - \frac{R^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{R^2}{2}\alpha \right) \quad (6-31)$$

### 6.2.6 Exemples de gabionnades

Nous allons présenter quelques configurations de gabionnades qui serviront d'exemples pour les calculs.

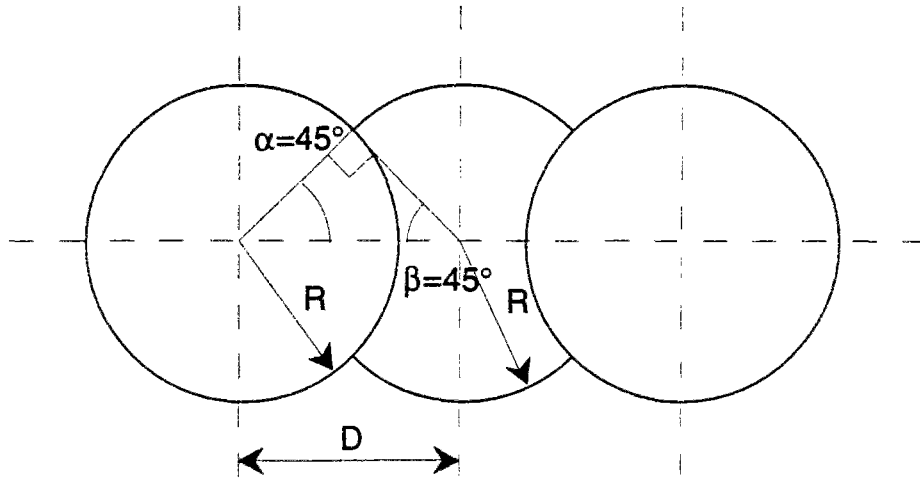


Figure 6-7 Exemple de gabionnade avec une configuration géométrique défavorable pour la stabilité

La figure précédente illustre une possibilité de configuration géométrique de gabionnade particulièrement économique en palplanches (raccord à  $90^\circ$ , rayons des cellules principales et des cellules secondaires égaux). Malheureusement, une telle configuration est considérée comme peu favorable du point de vue de la stabilité, avec des efforts importants au raccord en « T » (Lacroix et al. , 1970).

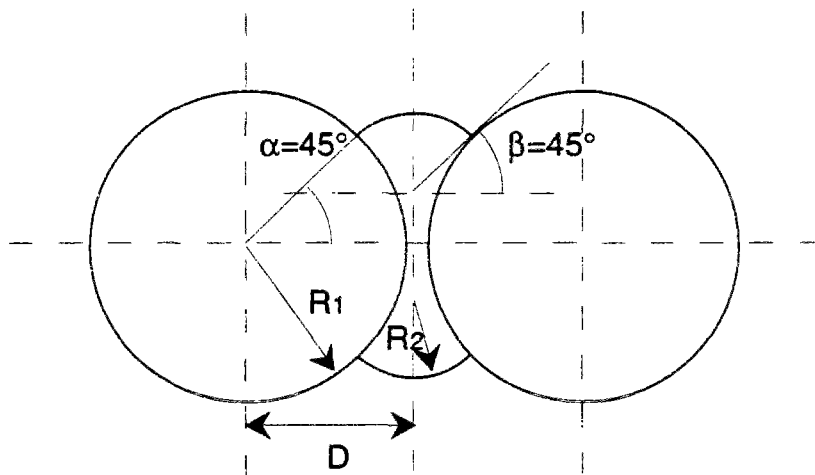


Figure 6-8 Exemple de gabionnade : port de Long Beach (Californie)  $R_2/R_1=0,525$

Pour la gabionnade du port de Long Beach, le raccord entre les cellules se fait encore à  $90^\circ$  mais le rayon des arcs secondaires est nettement plus petit que celui des cellules principales (Lacroix et al. , 1970).

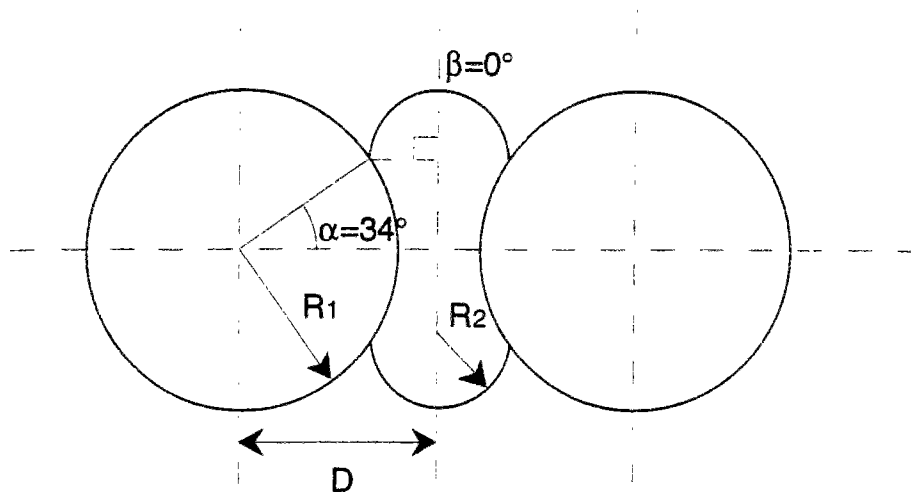


Figure 6-9 Exemple de gabionnade : terminal à conteneurs du Verdon (Port de Bordeaux)  
 $R_2/R_1=0,442$

Pour la gabionnade du terminal à conteneurs du Verdon, le raccord entre les cellules se fait cette fois-ci à  $34^\circ$ , le rayon des arcs secondaires est encore nettement plus petit que celui des cellules principales (Pernier, 1980).

### 6.2.7 Exemples numériques du majorant du chargement maximal supportable

On écrit la condition nécessaire de stabilité  $P_{rm} \geq P_e$  :

$$P_{rm} = P_{rm1,3} + P_{rm2,3} + P_{rm4,5} + P_{rm5} \geq P_e \quad (6-32)$$

On obtient :

$$\frac{\gamma H}{C} \leq 4 + \frac{2R_1}{S} \left[ R_1 + R_1 (\pi - \alpha) \left( \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) + \frac{H}{2R_1} (D - R_1 \cos \alpha) \right] \quad (6-33)$$

$$\text{avec } S = DR_1 \sin \alpha - \frac{R_1^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{R_1^2}{2} \alpha$$

On peut alors comparer le facteur F égal au second membre de (6-33) pour les différentes géométries envisagées. On prend  $H/R_1=2$ .

Référence de la figure	D/R	$\alpha$	F
5-7	1,414	45°	19,0
5-8	1,078	45°	43,3
5-9	1,271	34°	28,3

Tableau 6-2 Facteur F pour diverses configurations

Pour un poids volumique donné, on peut évaluer pour les caractéristiques géométriques données, la valeur minimale de la cohésion nécessaire pour la stabilité que l'on déduit de notre étude cinématique. Prenons le cas de la configuration représentée en figure (5-7) avec  $\gamma=17 \text{ kN.m}^{-3}$  avec  $H=20 \text{ m}$ . On obtient  $C \geq 17,9 \text{ kPa}$ . Indépendamment de la résistance à la traction des palplanches, un gabion ayant une configuration géométrique défavorable rempli d'un remblai ayant de mauvaises propriétés mécaniques peut s'avérer instable en dehors de toute surcharge et de tout effet défavorable dû à la présence d'eau.

On vérifie qu'il est légitime de négliger la contribution de la puissance résistante due à la rotation localisée de la coque. Comme valeur du moment fléchissant maximal, on prend la valeur (optimiste) prise au chapitre 4 soit  $M_{\theta\theta_0}=9 \text{ kN.m/m}$ . On trouve alors pour la même configuration ( $C=17,9 \text{ kPa}$ ) une puissance résistante maximale associée à ce moment qui vaut  $2|\omega| M_{\theta\theta_0}$ . On trouve alors  $2|\omega| M_{\theta\theta_0} / P_{rm}=1,7 \cdot 10^{-4}$ .

### 6.2.8 Comparaison avec une autre cinématique

On peut comparer cette cinématique ne faisant pas jouer l'effort normal avec une adaptation de la cinématique qui sera étudiée en 6-3. Il faut faire  $K_p=1$  et ajouter la puissance résistante maximale du remblai. On continue à supposer que toutes les interfaces sont lisses. On aboutit alors à la condition nécessaire de stabilité suivante :

$$\gamma H \leq 4C + 2 \frac{N_0}{R} F_r \quad (6-34)$$

avec  $F_r$  qui est donné par la relation (6-69).

La condition pour que ( 6-33) soit plus contraignante que ( 6-34) s'écrit :

$$F \leq 4 + \frac{2N_0}{RC} F_r \quad (6-35)$$

Poursuivant le même exemple numérique que précédemment (Figure 6-7) en prenant  $C = 17,9 \text{ kPa}$ , on trouve que la condition (6-33) est plus contraignante pour  $N_0/R \geq 186,4 \text{ kPa}$ . Soit pour  $R=10 \text{ m}$ ,  $N_0 \geq 1864 \text{ kN/m}$  ce qui est le cas pour les palplanches utilisées usuellement pour les gabions. Sur cet exemple, c'est la cinématique ne faisant pas jouer l'effort normal qui donne le meilleur résultat.

Prenons maintenant des données identiques mais pour la configuration géométrique de la figure (5-8). On trouve cette fois  $N_0 \geq 7713 \text{ kN/m}$ , condition qui n'est pas satisfaite pour les palplanches usuelles.

### 6.2.9 Comparaison avec une statique en configuration déformée

Nous allons effectuer cette comparaison plus particulièrement pour la géométrie initiale définie sur la Figure 6-7.

Il faut préalablement construire une statique adaptée au cas du matériau cohérent. On peut se reporter aux travaux de Dormieux et Delaurens (1991), établis pour une cellule isolée :

$$\frac{\gamma^+ H}{C} \geq 2 + \frac{N_0}{RC} \quad (6-36)$$

Ce résultat peut être adapté à une gabionnade déformée en équilibre membranaire comme nous avons adapté les statiques obtenues pour une cellule isolée remplie de remblai purement frottant (§5.3.5). On trouve cette fois comme analogue de la formule (5-40) :

$$\frac{\gamma^+ H}{C} \geq 2 + \frac{N_0}{R'C} \quad \text{avec} \quad R' = \sup(R'_1, R'_2, D) \quad (6-37)$$

Pour la géométrie de la figure (5-7), on a  $R'=D=\sqrt{2}R$ . Prenons les caractéristiques de résistance utilisées précédemment  $N_0=5000 \text{ kN/m}$ ,  $C=17,9 \text{ kPa}$ ,  $R=10 \text{ m}$ ,  $H=20 \text{ m}$ . On trouve alors en configuration déformée :

$$\frac{\gamma_{df}^+ H}{C} \geq 2 + \frac{N_0}{R'C} \approx 21,75 \quad (6-38)$$

Alors que l'étude cinématique en configuration initiale a donné :

$$\frac{\gamma_{ini}^+ H}{C} \leq 19,0 \quad (6-39)$$

Sur cet exemple, on constate que la stabilité peut être assurée en configuration déformée, alors qu'elle ne l'est pas en configuration initiale.



### 6.2.10 Autre cinématique

Le mécanisme que nous venons d'étudier, pour une vitesse de déformation donnée de la coque, n'optimise pas la puissance des efforts extérieurs dans le remblai (à cause de la composante normale de la discontinuité de vitesse entre la coque et la partie B<sub>5</sub> du remblai le long de l'arc QP<sub>3</sub>). Nous allons proposer une variante qui élimine cette discontinuité ; elle s'avérera intéressante en particulier dans le cas où le terme dû à la résistance à la flexion de la coque deviendrait important devant le terme dû à la résistance du remblai.

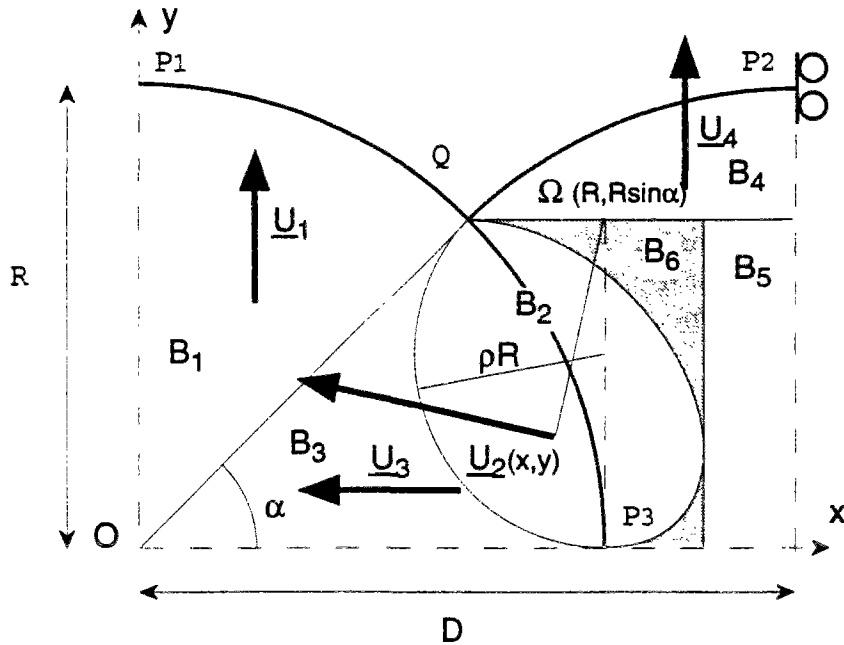


Figure 6-10 Variante de cinématique sans décollement entre le remblai et la paroi

Le bloc en rotation B2 au lieu d'être limité par la coque est limité, dans le remblai de la cellule de raccord par un arc d'ellipse dont nous donnons ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = \frac{1 + \cos \alpha}{2} + a \cos \theta + b \sin \theta \\ Y = \frac{\sin \alpha}{2} + a \cos \theta - b \sin \theta \end{cases} \quad (6-40)$$

Les demi-axes de l'ellipse sont donnés par :

$$\begin{cases} a = \frac{\sqrt{(1-\cos\alpha)\sin\alpha\cos\alpha}}{2\sqrt{\sin\alpha+1-\cos\alpha}} \\ b = \frac{\sqrt{(1-\cos\alpha)\sin\alpha\cos\alpha}}{2\sqrt{\sin\alpha-1+\cos\alpha}} \end{cases} \quad (6-41)$$

## Étude cinématique de la gabionnade

La vitesse dans la zone  $B_5$  est donnée par :

$$u_5 = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \begin{pmatrix} -X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6-42)$$

La frontière entre les blocs  $B_5$  et  $B_6$  est déduite de la représentation paramétrique donnée ci-dessus pour  $\theta = \theta_5$  tel que :

$$\theta_5 = \arctan \left( \sqrt{\tan \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right) \quad (6-43)$$

On obtient  $X_5$  en substituant  $\theta_5$  dans la représentation paramétrique de l'ellipse. Enfin le champ de vitesse dans  $B_6$  est défini par :

$$u_6 = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \begin{pmatrix} X_5 \frac{X - D/R}{D/R - X_5} \\ Y \\ - \left( \frac{D/R}{D/R - X_5} \right) Z \end{pmatrix} \quad (6-44)$$

L'arc d'ellipse a été déterminé de telle sorte que la discontinuité de vitesse soit pertinente le long de cet arc. Supposons cette fois que la puissance résistante maximale apportée par le remblai soit négligeable devant celle apportée par la coque. On trouve alors comme condition nécessaire de stabilité :

$$2M_{\theta\theta_0} \geq \frac{(1 - \cos \alpha)}{2} \gamma^H R D \quad (6-45)$$

En prenant les caractéristiques du gabion étudié en 5.2.5, on trouve :

$$\gamma^+ H \leq 1,95 \text{ kPa} \quad (6-46)$$

On rappelle qu'en 5.2.5, on avait trouvé une statique donnant la majoration suivante :

$$\gamma^+ H \geq 0,97 \text{ kPa} \quad (6-47)$$

L'écart de 1 à 2 de l'encadrement s'explique par le choix d'une cinématique de la coque indépendante de la hauteur. Si le chargement appliqué était une pression uniforme appliquée sur le dessus du remblai, le majorant cinématique serait divisé par 2 et on aurait alors l'égalité entre les bornes cinématique et statique.

### 6.2.11 Conclusions

L'étude d'un mécanisme ne faisant pas jouer l'effort normal a pu mettre en évidence une faible stabilité de la gabionnade dans des conditions connues effectivement pour être particulièrement défavorables (§6.2.6) :

- remblai non frottant
- configuration géométrique connue comme défavorable

Dans le cas du remblai purement cohérent avec une cohésion faible (c'est-à-dire telle que la contribution de la résistance à la flexion de la coque devienne prépondérante par rapport à celle du remblai), nous avons pu retrouver les ordres de grandeur fournis par l'étude statique de la gabionnade en configuration initiale grâce à un mécanisme adapté (§6.2.8).

Dans le cas du mécanisme étudié en §6.2.7, on a pu comparer la stabilité de plusieurs configurations géométriques de gabionnades les unes par rapport aux autres et mettre en évidence d'importantes différences.

L'extension au cas du remblai frottant de ces mécanismes semble difficile. Le changement de géométrie de la cellule principale circulaire à périmètre constant amène nécessairement une partie au moins du remblai de la cellule principale à travailler en « butée », ce qui apporte une contribution négative importante à la puissance des efforts extérieurs.

## 6.3 Étude cinématique sous poids propre avec interface lisse à la base

### 6.3.1 Choix d'une cinématique

Nous allons étudier une cinématique très simple de déformation plane homogène.

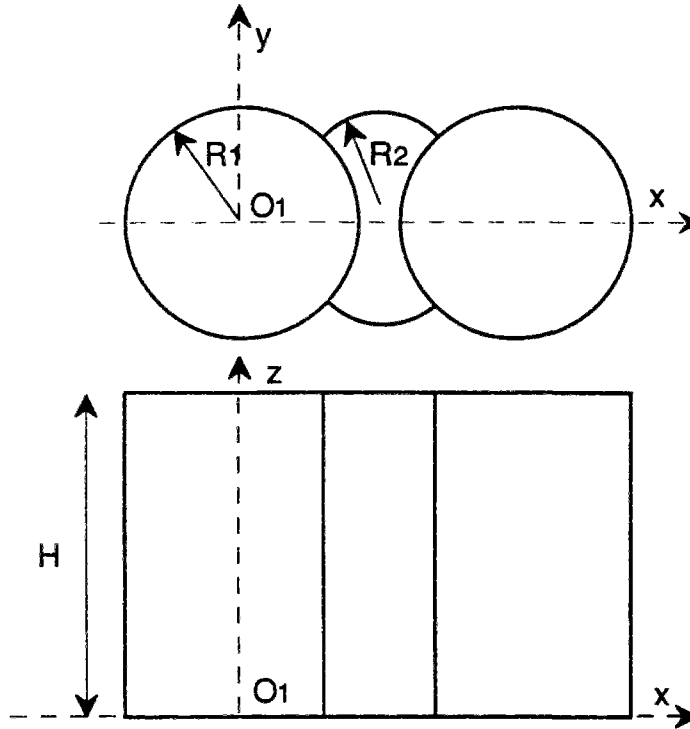


Figure 6-11 Vue de face et de dessus d'une gabionnade - Choix des axes de coordonnées

On choisit dans le remblai un champ défini par :

$$\underline{U}(x, y, z) = y\mathbf{e}_y + f(z)\mathbf{e}_z \quad (6-48)$$

On calcule le tenseur des déformations correspondant :

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f'(z) \end{pmatrix} \quad (6-49)$$

Pour que le poids propre soit moteur, il faut  $f(z) < 0$  ; compte tenu de la condition à la limite au bord inférieur  $f(0) \geq 0$ , on en déduit  $f'(z) \leq 0$  au moins dans une certaine région. On suppose donc  $f'(z) < 0$  partout.

La condition de pertinence pour le critère de Coulomb sans cohésion aboutit alors à la condition :

$$|f'(z)| = -f'(z) \leq \frac{1-\sin \varphi}{1+\sin \varphi} = K_a \quad (6-50)$$

On verra que la puissance résistante maximale de la coque ne dépend que de la vitesse horizontale, il faut donc choisir  $f'(z)$  qui maximise la puissance des efforts extérieurs. On choisit donc :

$$f'(z) = \text{Constante} = -K_a \quad (6-51)$$

Compte tenu de la condition à la limite  $f(0) \geq 0$ , la maximisation de la puissance des efforts extérieurs conduit à prendre  $f(0) = 0$  d'où le champ cinématique :

$$\underline{U}(x, y, z) = y \underline{e}_y - z K_a \underline{e}_z \quad (6-52)$$

On reconnaît là un champ homogène de déformation plane parallèlement au plan  $y, z$ .

### 6.3.2 Calcul de la puissance des efforts extérieurs

Il faut maintenant calculer la puissance du poids propre pour le champ cinématique que nous venons de déterminer (6-52). Compte tenu de toutes les symétries de la gabionnade et du champ cinématique, il suffit de faire le calcul sur un tronçon de gabionnade (Figure 6-12).

La gabionnade est un cylindre droit  $\Omega$  ayant pour base une surface  $\Sigma$  d'aire  $A$ . On a donc :

$$P_e = \int_{\Omega} -\gamma U_z d\Omega = \int_0^H \gamma K_a z dz \int_{\Sigma} d\Sigma = \gamma K_a A \frac{H^2}{2} \quad (6-53)$$

Il reste à déterminer l'aire  $A$  d'un tronçon de gabionnade (Figure 6-12). On utilise comme paramètres caractérisant un gabion circulaire les rayons  $R_1$  et  $R_2$  et les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

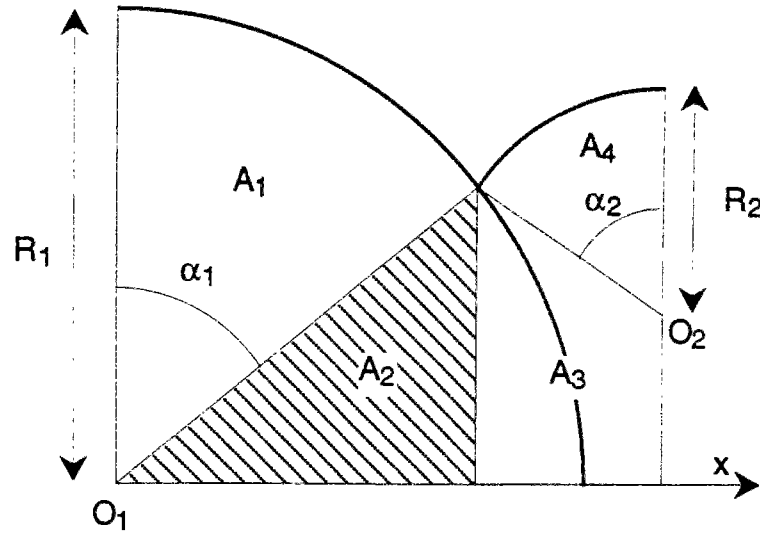


Figure 6-12 Calcul de l'aire d'un tronçon de gabionnade

On a évidemment :

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \quad (6-54)$$

On calcule chaque aire  $A_i$  :

$$A_1 = \frac{1}{2} R_1^2 \alpha_1 \quad (6-55)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} R_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \quad (6-56)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} (2R_1 \cos \alpha_1 - R_2 \cos \alpha_2) R_2 \sin \alpha_2 \quad (6-57)$$

$$A_4 = \frac{1}{2} R_2^2 \alpha_2 \quad (6-58)$$

D'où finalement l'aire cherchée<sup>1</sup> A:

$$A = \frac{1}{2} R_1^2 \left( (\alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) + 2 \frac{R_2}{R_1} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 (\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) \right) \quad (6-59)$$

### 6.3.3 Calcul de la puissance résistante maximale

Comme on étudie un critère de Coulomb sans cohésion pour le remblai, la puissance résistante maximale est en totalité située dans l'enceinte de palplanches. Pour le tronçon de gabionnade, il faudra ajouter les contributions relatives à l'arc principal et à l'arc de raccord.

<sup>1</sup> On peut s'assurer que l'expression obtenue reste valable même dans le cas de figure où  $O_2$  est située de l'autre côté de l'axe  $O_1x$  (côté des  $y < 0$ ), du moment que le point d'intersection entre les deux arcs reste du côté des  $y > 0$ .

On suppose qu'en tout point de la coque la vitesse horizontale de la coque est égale à la vitesse horizontale du remblai et que la vitesse verticale de la coque est nulle. On fait l'hypothèse que l'interface palplanche/remblai est lisse. Le champ cinématique que nous venons de définir est donc pertinent.

### Calcul de la puissance résistante maximale dans l'arc principal

Commençons donc par déterminer la puissance résistante maximale dans l'arc principal.

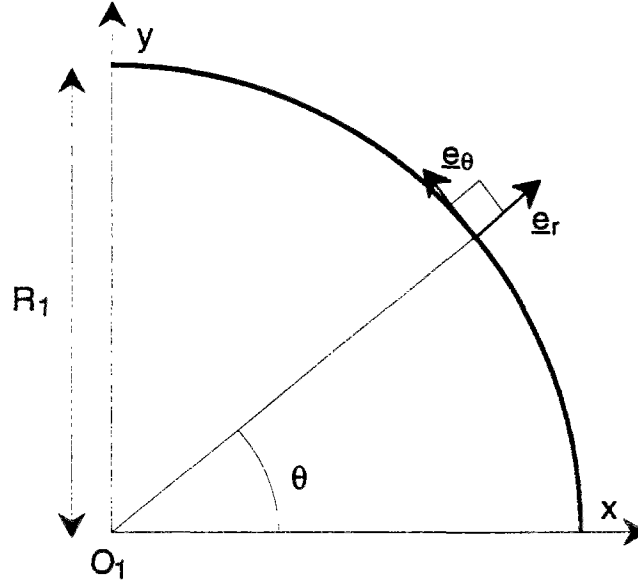


Figure 6-13 Calcul de la puissance résistante maximale dans l'arc principal

Il faut exprimer la vitesse d'un point de la coque dans le repère associé aux coordonnées cylindriques. On trouve :

$$\underline{u} = y \underline{e}_y = R_1 \sin^2 \theta \underline{e}_r + R_1 \sin \theta \cos \theta \underline{e}_\theta \quad (6-60)$$

Alors la densité de puissance des efforts intérieurs s'écrit pour un mouvement de Kirchhoff-Love, compte tenu que  $\underline{u}$  ne dépend pas de  $z$  :

$$p_i = -N_{\theta\theta} \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) - M_{\theta\theta} \frac{1}{R_1^2} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (6-61)$$

On néglige la résistance à la flexion  $M_{\theta\theta}$ . Sous cette hypothèse, compte tenu du critère portant sur  $N_{\theta\theta}$ , on a :

$$P_{rm1} = \frac{N_0}{R_1} \int_0^{\pi/2} \int_0^H \left| \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right| d\theta dz \quad (6-62)$$

D'où la puissance résistante maximale pour l'arc (Figure 6-13) :

$$P_{rm1} = \frac{N_0}{R_1} H \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta R_1^2 d\theta = \frac{\pi}{4} H R_1 N_0 \quad (6-63)$$

### Calcul de la puissance résistante maximale dans l'arc secondaire

Passons maintenant au cas de l'arc secondaire.

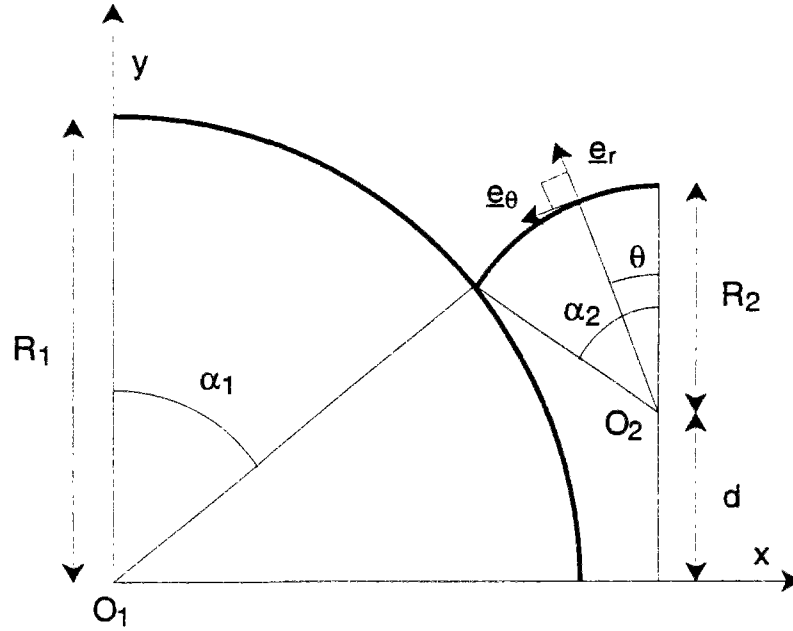


Figure 6-14 Calcul de la puissance résistante maximale pour l'arc secondaire

On écrit la vitesse des points de l'arc secondaire :

$$\underline{u} = (d + R_2 \cos \theta)(\cos \theta \underline{e}_r - \sin \theta \underline{e}_\theta) \quad (6-64)$$

On détermine ensuite la puissance résistante maximale de l'arc secondaire :

$$P_{rm2} = \frac{N_0}{R_2} H \int_0^{\alpha_2} R_2^2 \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} H R_2 N_0 (\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) \quad (6-65)$$



### 6.3.4 Condition nécessaire cinématique de stabilité

La puissance résistante maximale est finalement la somme des termes relatifs à chaque arc :

$$P_{rm} = P_{rm_1} + P_{rm_2} = \frac{1}{2} H R_1 N_0 \left( \frac{\pi}{2} + (\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (6-66)$$

On peut maintenant écrire la condition nécessaire cinématique de stabilité  $P_e \leq P_{rm}$  en notant  $\rho = R_2/R_1$  :

$$\gamma \leq 2K_P \frac{N_0}{R_1 H} \left( \frac{\pi/2 + \rho(\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)}{\alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + 2\rho \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \rho^2 (\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)} \right) \quad (6-67)$$

Dans le cas  $\rho=1$ ,  $\alpha_1=\alpha_2=\pi/2$ , on retrouve une gabionnade constituée de gabions cellulaires identiques tangents les uns aux autres. Dans ce cas, la condition (6-67) devient :

$$\gamma \leq 2K_P \frac{N_0}{RH} \quad (6-68)$$

Cette condition (6-68) est celle déjà trouvée pour le gabion isolé grâce à un champ de déformation homogène (Dormieux et Delaurens, 1991).

On pose :

$$F_r = \frac{\pi/2 + \rho(\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)}{\alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + 2\rho \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \rho^2 (\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)} \quad (6-69)$$

On peut récrire la condition (6-68) sous la forme suivante :

$$\gamma^+ \leq 2F_r K_P \frac{N_0}{RH} \quad (6-70)$$

Dans le cas d'une gabionnade constituée de gabions cellulaires identiques, tangents les uns aux autres, on a dans l'inégalité précédente  $F_r=1$ .

### 6.3.5 Influence de la configuration géométrique de la gabionnade

L'expression (6-69) permet, avec sa forme relativement compacte, d'obtenir des indications sur l'écart de comportement de la gabionnade par rapport au gabion isolé ou à la gabionnade constituée de cellules juxtaposées, tangentes les une aux autres.

Le tableau suivant résume les résultats pour les diverses configurations géométriques déjà envisagées au 5-2.

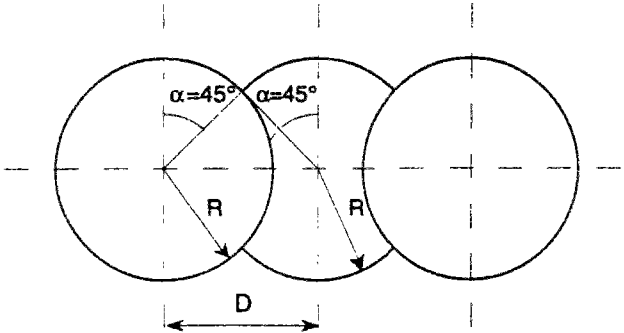
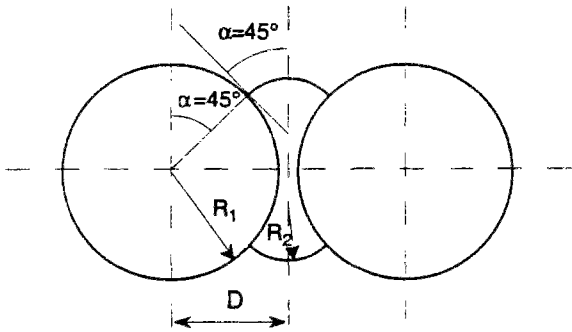
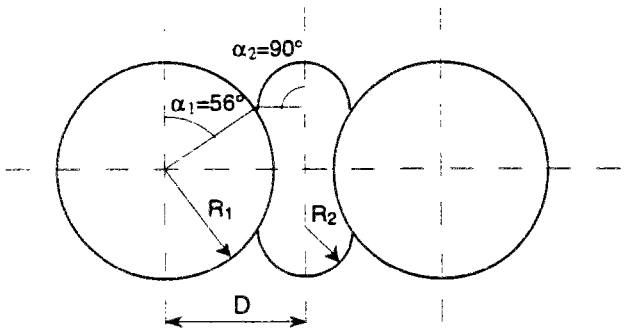
Configuration géométrique	$R_2/R_1$	$R_1/D$	$F_r$
	1	0,707	0,72
	0,525	0,927	0,91
	0,442	0,787	1,01

Tableau 6-3 Configurations géométriques et paramètre  $F_r$

Pour la première configuration géométrique particulièrement économique en palplanches, on trouve :  $F_r \approx 0,72$ . Cette faible valeur, comparée à celle obtenue pour les autres configurations confirme le caractère défavorable de cette configuration.

Pour la gabionnade du port de Long Beach, on trouve:  $F_r \approx 0,91$ .

Pour la gabionnade du terminal à conteneurs du Verdon, on trouve :  $F_r \approx 1,01$ .

Si on compare par rapport à l'étude du 6-2, c'est toujours la première configuration qui apparaît comme la moins stable. Par contre, le classement relatif des configurations de Long Beach et du Verdon sont inversées par rapport à l'étude du 5-2. On remarque que dans les deux premiers exemples le nombre  $F_r$  est très voisin de  $R_1/D$  : ceci est à rapprocher avec les recommandations de certaines méthodes de dimensionnement qui préconisent de remplacer dans la formule des chaudronniers le rayon de la cellule principale par la longueur  $D$  (formule de Swatek).

### 6.3.6 Influence de l'eau (équilibre hydrostatique)

La cinématique utilisée permet aussi une prise en compte facile de la différence éventuelle de hauteur d'eau entre l'intérieur de la gabionnade et l'extérieur.

Il faut alors prendre en compte le travail des forces de pression comme cela a été fait pour le gabion isolé (§4.5).

On rappelle que  $h_s$  désigne la hauteur d'eau dans la gabionnade et  $h_w$  la hauteur à l'extérieur.

Pour le tronçon de gabionnade (Figure 6-14) la puissance des pressions intérieure  $p_i$  et extérieure  $p_e$  pour une tranche verticale de hauteur unité s'écrit :

$$P_{pr} = (p_i - p_e) \int_{\text{arc}} u_r dl = \frac{(p_i - p_e)}{2} \left( R_1^2 (\alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1) + R_2^2 (\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) \right) \quad (6-71)$$

En intégrant sur la hauteur  $H$  de la gabionnade, on obtient :

$$P_{pr} = \frac{\gamma_w (h_s^2 - h_w^2)}{4} (R_1 (\alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1) + R_2 (\alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)) \quad (6-72)$$

Il faut également évaluer la nouvelle valeur de la puissance du poids du remblai; on note  $A$  l'aire de la section horizontale du tronçon étudié (6-59) :

$$P_{re} = \int_0^{h_s} \gamma K_a z dz \int_{\Sigma} d\Sigma + \int_{h_s}^H \gamma K_a z dz \int_{\Sigma} d\Sigma = K_a A \frac{\gamma h_s^2 + \gamma (H^2 - h_s^2)}{2} \quad (6-73)$$

On définit le facteur de confiance par :

$$F = \frac{P_{rm}}{P_{pr} + P_{re}} \quad (6-74)$$

où  $P_{rm}$ ,  $P_{pr}$  et  $P_{re}$  sont respectivement donnés par (6-66), (6-72) et (6-73).

Nous allons étudier maintenant un exemple particulier : une gabionnade composée de trois cellules principales et de deux cellules intermédiaires. Cet exemple est traité dans le rapport de Buhan et al. de 1992. Rappelons les caractéristiques de cette gabionnade :

géométrie	poids volumique	résistance
$H=20\text{ m}$	$\gamma=16\text{ kNm}^{-3}$	$\varphi=20^\circ$
$R_1=10\text{ m} ; R_2=5,77\text{ m}$	$\gamma'=14\text{ kNm}^{-3}$	$N_0=3000\text{ kNm}^{-1}$
$\alpha_1=60^\circ ; \alpha_2=30^\circ$	$\gamma_w=10\text{ kNm}^{-3}$	
$h_w=10\text{ m}$		

Tableau 6-4 Données sur la gabionnade pour l'étude paramétrique en fonction de  $h_s$

On a tracé le facteur de confiance, en tenant compte du nombre de cellules pour les paramètres figurant dans le tableau précédent. On a également rappelé les résultats du rapport de Buhan et al. où une cinématique par blocs est utilisée (Figure 6-15).

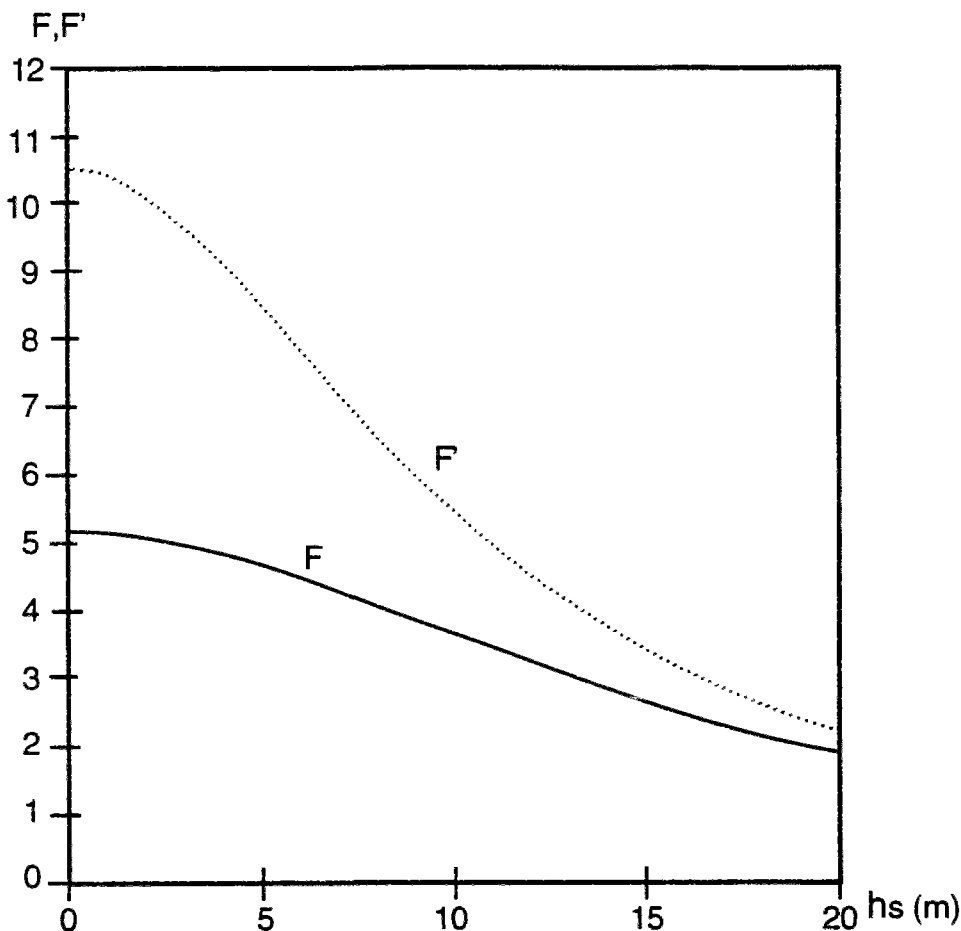


Figure 6-15 Facteur de confiance pour un exemple de gabionnade en fonction de  $h_s$   
 (F : cinématique homogène formule ( 6-74),  
 F' : cinématique par blocs du rapport Buhan et al., 1992)

Il faut noter que les résultats ne sont pas directement comparables car les calculs du rapport de Buhan et al. prennent en compte un angle de frottement de  $15^\circ$  entre le remblai et le substratum.

L'importance majeure du rôle joué par les hauteurs d'eau dans la stabilité est mise en évidence comme dans le rapport de Buhan et al. même si elle est un peu moins sensible que dans ce rapport.

### 6.3.7 Conclusions

On a abouti (§6.3.4) à une condition nécessaire cinématique qui s'écrit  $\gamma^+ \leq 2F_r K_p N_0 / RH$  dans le cas « sans eau ». On note que dans cette condition nécessaire de stabilité, le facteur  $F_r$  est indépendant de l'élancement et de l'angle de frottement interne du remblai.

Le facteur  $F_r$  ne dépend que des données géométriques de la gabionnade. Pour les configurations géométriques étudiées, on a vu que le facteur  $F_r$  pouvait varier au moins entre 0,72 et 1,01. Il permet ainsi de comparer la stabilité de ces diverses configurations géométriques vis-à-vis du mécanisme envisagé (§6.3.5).

Dans le cas particulier d'une gabionnade constituée de cellules juxtaposées tangentes les unes aux autres, on a  $F_r=1$ . On peut alors comparer ce résultat à une statique très simple où dans chaque cellule, on choisit le champ statique retenu pour le gabion isolé. Ceci nous donne, sans tenir compte de la résistance des palplanches à la flexion  $\gamma^+ \geq K_p N_0 / RH$ . On a alors un rapport de 1 à 2 entre les bornes statiques et cinématiques qui peut être diminué en prenant en compte la résistance à la flexion des palplanches.

L'influence des conditions hydrauliques (§6.3.6) s'avère très importante conformément aux résultats antérieurs de Buhan et al. (1992).

## 6.4 Étude cinématique avec interface frottante à la base

### 6.4.1 Choix d'une cinématique

On va partir d'une des cinématiques dans le remblai étudiée dans le rapport Buhan et al (1992).

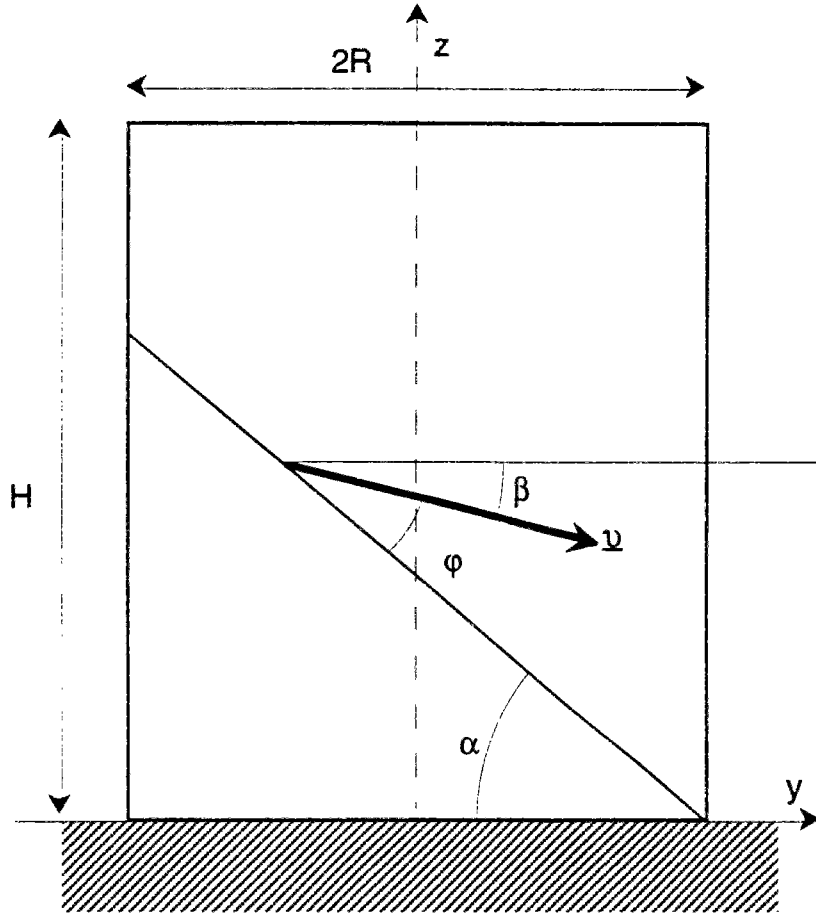


Figure 6-16 Cinématique par blocs pour la gabionnade -  
Vue en coupe passant par l'axe d'une cellule principale.

La cinématique pour la gabionnade (Figure 6-16) est définie par deux blocs séparés par un plan faisant l'angle  $\alpha$  avec le plan horizontal. On a la relation :

$$\beta = \alpha - \varphi \quad (6-75)$$

On envisage de définir pour la coque une cinématique par blocs telle que la composante radiale de la vitesse d'un point de la coque soit égale à celle du point du remblai adjacent. Mais on se heurte alors à une difficulté : il y a une discontinuité de la composante normale (à la coque) de la vitesse. On ne peut plus alors construire un mouvement de Kirchhoff-Love (c'est à dire fixer le champ de vitesse de rotation convenable) à partir de ces données en vitesse.

Il faut donc adapter cette cinématique par blocs afin de la rendre plus régulière. On va remplacer pour cela la discontinuité dans le remblai par une bande de cisaillement, la discontinuité dans la coque disparaissant aussi et étant remplacée par une zone en déformation (Figure 6-17).

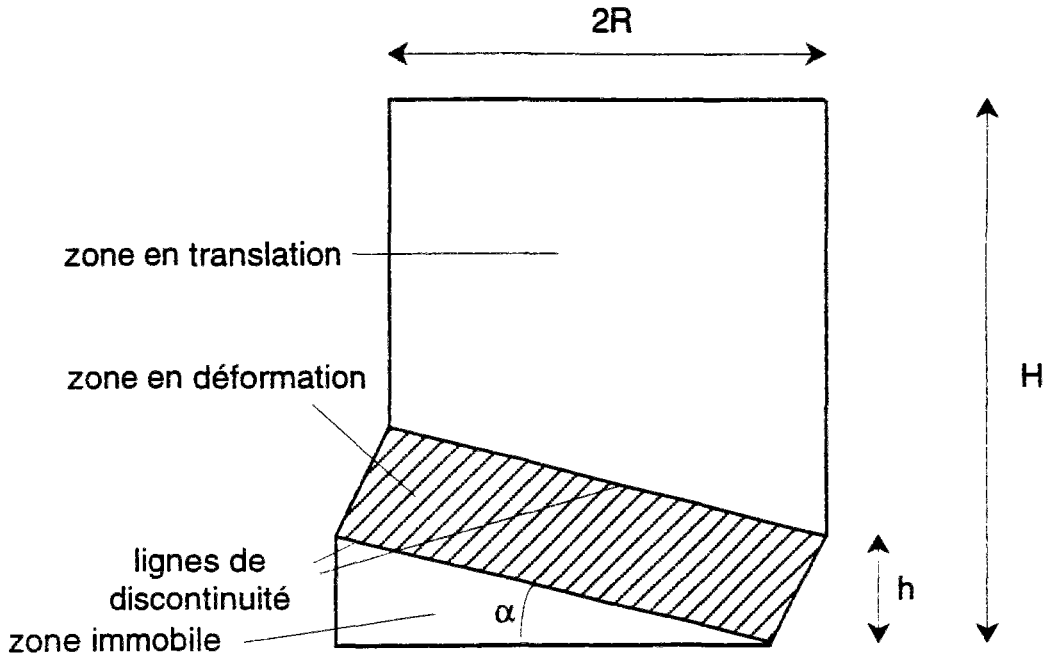


Figure 6-17 Zone en déformation de la coque et lignes de discontinuité

### Champ de vitesse dans le remblai

Venons en à une formulation plus mathématique de ce nouveau champ cinématique. Soit  $\underline{v}(x, y, z)$  le champ de vitesse dans le remblai pour le champ par blocs. On définit le nouveau champ de vitesse dans le remblai par :

$$\underline{U}(x, y, z) = \frac{1}{h} \int_0^h \underline{v}(x, y, z - \xi) d\xi \quad (6-76)$$

Dans la définition ( 6-76), on a posé  $\underline{v}(x, y, z) = 0$  pour  $z < 0$ . La hauteur  $h$  sera « l'épaisseur » selon l'axe vertical de la zone en cisaillement.

On commence par étudier cette cinématique pour une cellule principale. On utilise un système de coordonnées cylindriques.

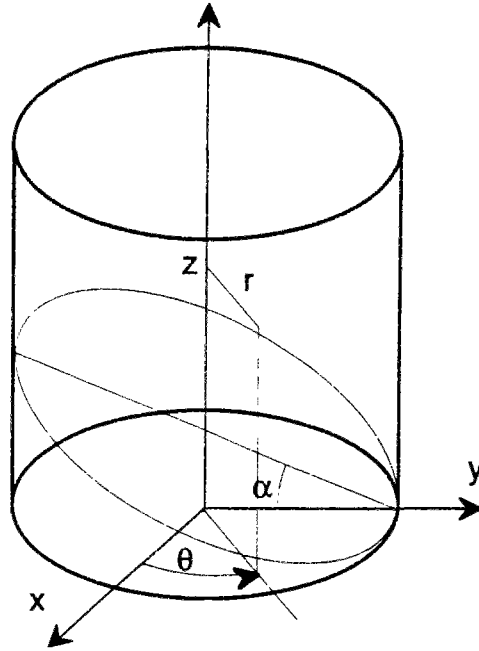


Figure 6-18 Coordonnées cylindriques

On pose :

$$g(r, \theta, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (z - R \tan \alpha + r \sin \theta \tan \alpha) / h \geq 1 \\ (z - R \tan \alpha + r \sin \theta \tan \alpha) / h & \text{si } 1 \geq (z - R \tan \alpha + r \sin \theta \tan \alpha) / h \geq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \geq (z - R \tan \alpha + r \sin \theta \tan \alpha) / h \end{cases} \quad (6-77)$$

On peut maintenant écrire les composantes de la vitesse du remblai en utilisant cette fonction  $g$  :

$$\begin{cases} U_r = g(r, \theta, z) \sin \theta \\ U_\theta = g(r, \theta, z) \cos \theta \\ U_z = -g(r, \theta, z) \tan \beta \end{cases} \quad (6-78)$$

### Cinématique dans la coque

On choisit pour la coque le champ de vitesse défini par :

$$\begin{pmatrix} w(\theta, z) \\ u_\theta(\theta, z) \\ u_z(\theta, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_r(r = R, \theta, z) \\ U_\theta(r = R, \theta, z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6-79)$$

Ce champ de vitesse est pertinent pour l'interface si celle-ci est supposée lisse. Il suffit en fait que le glissement vertical du remblai par rapport aux palplanches soit permis.



## Chapitre 6

On peut maintenant calculer le tenseur de vitesse de déformations de la coque (se reporter par exemple à Bisch, 1993) :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \tan \alpha \cos^2 \theta & \frac{1}{2} \cos \theta \\ \frac{1}{2} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (6-80)$$

Le champ de vitesse de rotation est déterminé par la condition de Kirchhoff-Love :

$$\begin{pmatrix} v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u_\theta \right) \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\sin \theta}{h} \begin{pmatrix} \cos \theta \tan \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6-81)$$

On peut maintenant évaluer le tenseur de vitesse de variation de courbure (Bisch, 1993) :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{hR} \begin{pmatrix} \tan \alpha \cos 2\theta & \frac{1}{2} \cos \theta \\ \frac{1}{2} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (6-82)$$

Mais il faut encore tenir compte des éventuelles discontinuités. Celles-ci ne peuvent se produire que sur les lignes de discontinuité de la fonction  $g$  : c'est à dire deux ellipses intersection du cylindre et de deux plans faisant un angle  $\alpha$  avec le plan horizontal (Figure 6-17).

Notons pour commencer qu'il n'y a pas de discontinuité au passage de ces deux ellipses pour  $w$  et pour  $\underline{u}$  :

$$[[w]] = 0 ; [[\underline{u}]] = 0 \quad (6-83)$$

Il n'en est pas de même pour  $\underline{v}$  qui met en jeu les dérivées. Ecrivons donc le saut de  $\underline{v}$  :

$$[[\underline{v}]] = \pm \frac{\sin \theta}{h} \begin{pmatrix} \cos \theta \tan \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6-84)$$

Cherchons également la normale à ces lignes de discontinuité. L'ellipse inférieure est paramétrée de la manière suivante par  $\theta$  :

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ R \tan \alpha (1 - \sin \theta) \end{pmatrix} \quad (6-85)$$

Le vecteur tangent  $\underline{t}$  à ces ellipses s'écrit dans le base associée au système de coordonnées cylindriques :

$$\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\cos\theta \tan\alpha)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos\theta \tan\alpha \end{pmatrix} \quad (6-86)$$

Le vecteur normal à ces ellipses appartenant au plan tangent au cylindre vaut :

$$\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\cos\theta \tan\alpha)^2}} \begin{pmatrix} \cos\theta \tan\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6-87)$$

#### 6.4.2 Calcul de la puissance résistante maximale pour une gabionnade formée de cellules juxtaposées

Nous allons étudier le cas particulièrement simple d'une gabionnade constituée de gabions isolés juxtaposés (Figure 6-19). C'est le cas dans le port de Cherbourg pour une partie du quai de Normandie. La puissance résistante maximale peut alors se calculer comme pour un gabion isolé et les résultats peuvent être comparés à certains résultats obtenus pour une cellule isolée.

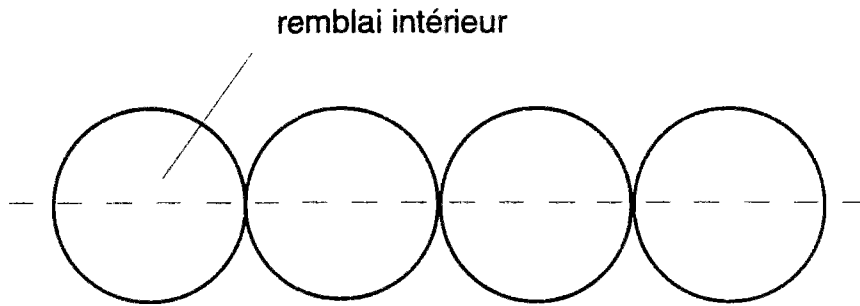


Figure 6-19 Gabionnade constituée de gabions juxtaposés

##### 6.4.2.1 Contribution de l'effort normal à la puissance résistante maximale

Calculons la contribution de la résistance à l'effort normal dans la puissance résistante maximale. Ecrivons d'abord la densité surfacique correspondante en chaque point de la coque :

$$\Pi_N = \sup \left\{ \frac{1}{h} \operatorname{tr} \left( \begin{pmatrix} N_{\theta\theta} & N_{\theta z} \\ N_{\theta z} & N_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tan\alpha \cos^2\theta & \frac{1}{2} \cos\theta \\ \frac{1}{2} \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \right) / \underline{N} \in G_N \right\} \quad (6-88)$$

## Chapitre 6

Il faut maintenant prendre en compte la forme particulière choisie pour le critère  $G_N$  à respecter par le tenseur des efforts normaux  $\underline{\underline{N}}$  que nous rappelons ci-dessous (§2.2.3) :

$$G_N = \left\{ \underline{\underline{N}} \mid N_{\theta\theta} \leq N_0; \mid N_{\theta z} \leq f \mid N_{\theta\theta} \mid \right\} \quad (6-89)$$

On calcule alors  $\Pi_N$  :

$$\Pi_N = \frac{N_0}{h} (\tan \alpha \cos^2 \theta + f \mid \cos \theta \mid) \quad (6-90)$$

On se place dans l'hypothèse où  $H \geq 2R \tan \alpha + h$  (coque suffisamment élancée). On calcule alors l'intégrale de  $\Pi_N$  sur la coque :

$$P_{rmN} = N_0 R (\pi \tan \alpha + 4f) \quad (6-91)$$

### 6.4.2.2 Contribution de la flexion à la puissance résistante maximale

Calculons maintenant la contribution de la résistance à la flexion hors rotations concentrées. On évalue d'abord la valeur de la densité surfacique de puissance résistante maximale due à la flexion en chaque point :

$$\Pi'_M = \sup \left\{ \frac{1}{hR} \text{tr} \left( \begin{pmatrix} M_{\theta\theta} & M_{\theta z} \\ M_{\theta z} & M_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tan \alpha \cos 2\theta & \frac{1}{2} \cos \theta \\ \frac{1}{2} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \right) / \underline{\underline{M}} \in G_M \right\} \quad (6-92)$$

Après calcul, on trouve si le critère en  $\underline{\underline{M}}$  s'écrit  $\mid M_{\theta\theta} \leq M_{\theta\theta_0}; \mid M_{\theta z} \leq M_{\theta z_0}$  :

$$P'_{rmM} = M_{\theta\theta_0} (4 \tan \alpha) + 4M_{\theta z_0} \quad (6-93)$$

Il faut maintenant évaluer la contribution due aux rotations concentrées. La densité linéique de puissance résistante maximale s'écrit :

$$\Pi''_M = \sup \left\{ \llbracket \underline{\underline{v}} \rrbracket \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{v}} / \underline{\underline{M}} \in G_M \right\} \quad (6-94)$$

où  $\underline{\underline{v}}$  représente la normale à la ligne de discontinuité dans le plan tangent à la coque donnée par (6-87).

Dans notre cas particulier, on obtient :

$$\Pi''_M = \sup \left\{ \frac{\sin \theta}{h \sqrt{1 + (\cos \theta \tan \alpha)^2}} \begin{pmatrix} \cos \theta \tan \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{\theta\theta} & M_{\theta z} \\ M_{\theta z} & M_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \tan \alpha \\ 1 \end{pmatrix} / \underline{\underline{M}} \in G_M \right\} \quad (6-95)$$

Soit pour un critère sans interaction entre les composantes de  $\underline{M}$  :

$$\Pi_M'' = \frac{|\sin \theta|}{h \sqrt{1 + (\cos \theta \tan \alpha)^2}} \left( M_{\theta\theta_0} \cos^2 \theta \tan^2 \alpha + M_{\theta z_0} 2 \tan \alpha |\cos \theta| + M_{zz_0} \right) \quad (6-96)$$

La contribution de ces discontinuités à la puissance résistante maximale s'obtient par intégration de cette densité :

$$P_{rmM}'' = 2 \int \Pi_M'' ds = 2 \int_0^{2\pi} \Pi_M'' R \sqrt{1 + (\cos \theta \tan \alpha)^2} d\theta \quad (6-97)$$

Compte tenu des possibilités de mouvement de rotation des serrures et des caractéristiques géométriques de la palplanche, il paraît légitime de négliger le terme en  $M_{\theta\theta_0}$  devant les termes en  $M_{zz_0}$ . Si on ne retient que le terme correspondant à  $M_{zz_0}$ , on obtient l'expression suivante pour la puissance résistante maximale due à la résistance à la flexion :

$$P_{rmM} = \frac{8R}{h} M_{zz_0} \quad (6-98)$$

#### 6.4.2.3 Effet de l'optimisation de la valeur du paramètre $h$ sur l'expression de la puissance résistante maximale

L'optimisation sur  $h$  conduit à prendre  $h$  petit devant  $R$ , comme nous allons le voir (§5.4.3). Bornons nous pour l'instant à comparer  $P_{rmN}$  et  $P_{rmM}$ .

$$\frac{P_{rmM}}{P_{rmN}} = \frac{8}{(\pi \tan \alpha + 4f)} \frac{M_{zz_0}}{h N_0} \quad (6-99)$$

Pour des palplanches de 12,5 mm d'épaisseur (AS500-12,5), on trouve comme ordre de grandeur :

$$\frac{P_{rmM}}{P_{rmN}} \approx 310^{-2} \frac{1}{h} \quad (6-100)$$

La relation précédente est compatible avec l'obtention de l'optimum pour une valeur de  $h$  relativement petite (ayant comme ordre de grandeur le mètre), ce qui rend a posteriori légitime de négliger le terme  $4M_{\theta z_0}$  devant  $\frac{8R}{h} M_{zz_0}$ . En effet, si l'on admet que  $M_{zz_0}$  et  $M_{\theta z_0}$  sont du même ordre, on voit que l'on a :

$$4M_{\theta z_0} \ll 8 \frac{R}{h} M_{zz_0} \quad (6-101)$$

## Chapitre 6

Nous prendrons finalement l'expression suivante pour la puissance résistante maximale :

$$P_{rm} = N_0 R (\pi \tan \alpha + 4f) + \frac{8R}{h} M_{zz0} \quad (6-102)$$

La puissance des efforts extérieurs vaut alors (on prend  $\beta = \alpha - \varphi$ ) si  $H \geq \frac{h}{2} + R \tan \alpha$  :

$$P_e = \gamma \tan(\alpha - \varphi) \pi R^2 \left( H - \frac{h}{2} - R \tan \alpha \right) \quad (6-103)$$

### 6.4.2.4 Première comparaison avec la cinématique par blocs

Nous pouvons effectuer une première comparaison avec la cinématique de départ (Buhan et al., 1992). Dans cette cinématique la coque est caractérisée par deux blocs (Figure 6-20).

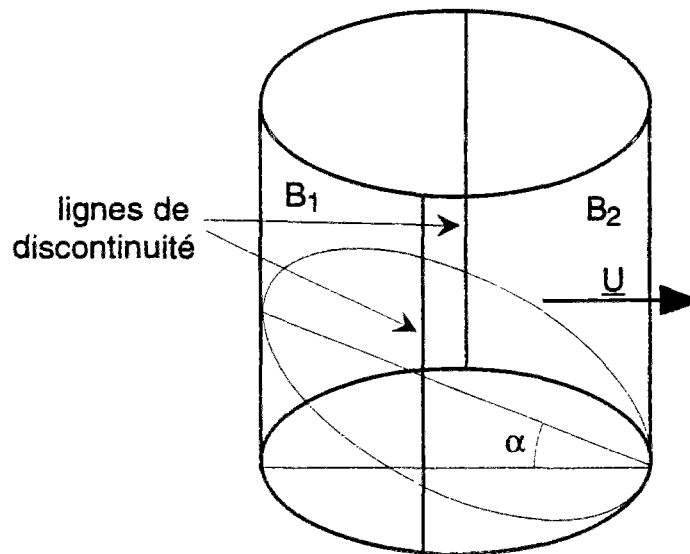


Figure 6-20 Mécanisme par blocs dans la coque

La puissance résistante maximale dans la coque vaut alors :

$$P_{rm} = 2N_0 H U \quad (6-104)$$

Plaçons nous dans l'hypothèse d'une gabionnade soumise à son seul poids propre, sans remblai extérieur. La cinématique que nous proposons ne peut être meilleure (en supposant qu'à angle  $\alpha$  donné la puissance des forces extérieures soit inchangée par rapport à la cinématique par blocs, ce qui sera approximativement le cas si  $h$  est petit devant  $H$ ) que si :

$$\frac{H}{R} \geq \frac{\pi \tan \alpha + 4f}{2} \quad (6-105)$$

Une condition nécessaire, compte tenu de  $\alpha \geq \varphi$  et de  $f$  pris égal à 0,3 est :

$$\frac{H}{R} \geq \frac{\pi \tan \varphi + 4f}{2} \approx 1,5 \tan \varphi + 0,6 \quad (6-106)$$

On voit que a priori l'amélioration portera sur les cas  $H/R$  suffisamment grand et des valeurs de  $\varphi$  suffisamment petites. Cela va être précisé plus loin.

### 6.4.3 Obtention d'un majorant du chargement maximal

On introduit les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\eta = \frac{H}{R}; \eta' = \frac{h}{2R}; c = \frac{4M_{zz0}}{N_0 R} \quad (6-107)$$

Les expressions de la puissance résistante maximale (6-102) et de la puissance des efforts extérieurs (6-103) peuvent alors se récrire :

$$P_{rm} = N_0 R \left[ (\pi \tan \alpha + 4f) + \frac{c}{\eta'} \right] \quad (6-108)$$

$$P_e = \gamma \tan(\alpha - \varphi) \pi R^3 (\eta - \tan \alpha - \eta') \quad (6-109)$$

La condition nécessaire de stabilité s'écrit :

$$\frac{\gamma R H}{N_0} \leq K_p F_d \quad (6-110)$$

avec :

$$F_d = \frac{1}{K_p} \frac{\eta(\pi \tan(\alpha) + 4f + c/\eta')}{\pi \tan(\alpha - \varphi)(\eta - \tan(\alpha) - \eta')} \quad (6-111)$$

Estimons l'ordre de grandeur de  $c$ . On suppose les palplanches de type (AS500-12,5). Pour ces palplanches, on peut prendre  $N_0 = 5000$  kN/m (résistance garantie au dégrafage) et  $M_0 = 84,97$  kN.m/m. Pour un rayon de 10 m on trouve :

$$c \approx 0,0069$$

On cherche à optimiser  $F_d$  par rapport à  $\alpha$  et à  $\eta'$ . En dérivant par rapport à  $\eta'$  on trouve la valeur optimale de  $\eta'$  :

## Chapitre 6

$$\eta'_{\text{opt}} = \frac{\sqrt{c(c + \pi\eta \tan \alpha - \pi \tan \alpha + 4f\eta - 4f \tan \alpha) - c}}{\pi \tan \alpha + 4f} \quad (6-112)$$

Prenant en compte le fait que le paramètre  $c$  est petit, on peut encore écrire :

$$\eta'_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{c(\eta - \tan \alpha)}{(\pi \tan \alpha + 4f)}} \quad (6-113)$$

Evaluons l'ordre de grandeur de cette dernière quantité pour  $c=0,0069$ ,  $\eta=2$ ,  $f=0,3$  et  $\tan \alpha=1$  : on trouve  $\eta'_{\text{opt}} \approx 0,04$ . Soit une valeur optimisée pour  $h$  de 80 cm (pour  $R = 10$  m).

L'angle optimal peut éventuellement être tel que  $\tan(\alpha) > \eta/2$ . Il faut alors adapter l'expression de la puissance des efforts extérieurs et de la puissance résistante maximale. On a alors l'expression suivante pour les forces extérieures :

$$P_e = 2\gamma \tan(\alpha - \varphi) \int_{\arcsin(1-\frac{\eta}{\tan(\alpha)})}^{\pi/2} d\theta \left( \frac{R}{R(1-\frac{\eta}{\tan(\alpha)\sin(\theta)})} \int_r^R r dr \left( \frac{H}{\tan(\alpha)(R-r\sin(\theta))} \int_z^H dz \right) \right) \quad (6-114)$$

On utilise le majorant suivant de la puissance résistante maximale :

$$P_{\text{rm}} < 2N_0 R \int_{\arcsin(1-\frac{\eta}{\tan(\alpha)})}^{\pi/2} (\tan(\alpha)\cos^2(\theta) + f|\cos \theta| + \frac{c}{4\eta'}|\sin \theta|) d\theta \quad (6-115)$$

On obtient alors une nouvelle condition nécessaire pour la stabilité.

On peut maintenant procéder à une optimisation numérique portant sur les paramètres  $\alpha$  et  $\eta'$  en utilisant les inégalités pour  $\tan(\alpha) > \eta/2$  et pour  $\tan(\alpha) < \eta/2$ . Les résultats sont reportés sur la figure suivante en comparant les résultats obtenus avec le mécanisme par blocs dans la coque qui a déjà servi de comparaison (figure 3-8).

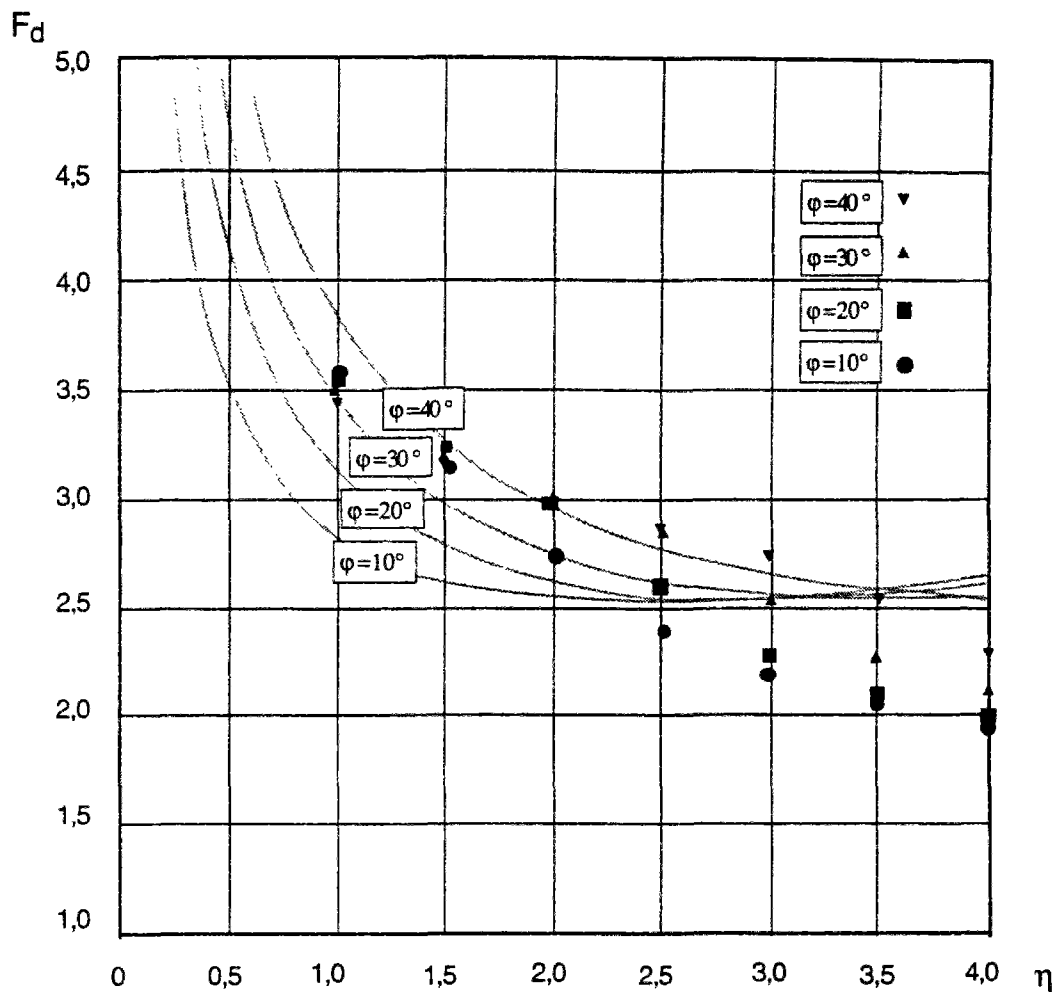


Figure 6-21 Facteur de confiance  $F_d$

Les points indiqués par des symboles correspondent au nouveau mécanisme de déformation dans la coque ; les courbes grisées sont obtenues avec un mécanisme par blocs dans la coque).

Comme annoncé, le nouveau mécanisme n'apporte une amélioration que pour les valeurs faibles de l'angle de frottement  $\varphi$  et pour les valeurs élevées de l'élanement  $\eta$ . Il faut signaler néanmoins que ce nouveau mécanisme est compatible avec un bord inférieur de la coque encastré ou en appui simple, ce qui n'est pas le cas pour le mécanisme par blocs servant de comparaison.

#### 6.4.4 Prise en compte de la présence d'un remblai

Le type de mécanisme asymétrique que nous venons de considérer n'est vraiment adapté que dans une configuration asymétrique (sans quoi, il conviendrait de le « symétriser » pour essayer d'améliorer les résultats). Nous allons donc considérer maintenant le cas où la gabionnade est en configuration « quai » (Figure 6-22).



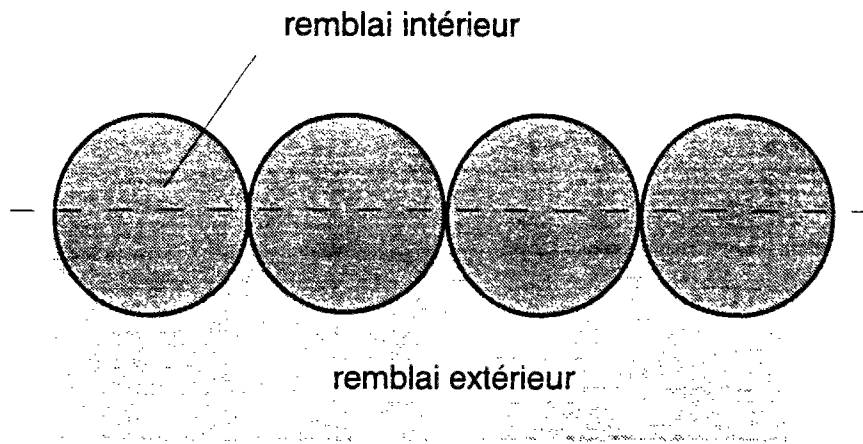


Figure 6-22 Gabionnade constituée de cellules juxtaposées avec un remblai extérieur (vue de dessus)

Pour simplifier nous supposons que le remblai extérieur a les mêmes caractéristiques que le remblai intérieur : il est constitué d'un matériau purement frottant ayant le même angle de frottement interne  $\phi$  que le remblai intérieur. Nous supposons également que l'interface entre les palplanches et ce remblai extérieur est lisse.

Par rapport à la situation étudiée précédemment, le mécanisme va être prolongé dans le remblai extérieur. Nous partons donc du même mécanisme par blocs prolongé dans le remblai extérieur (Figure 6-23).

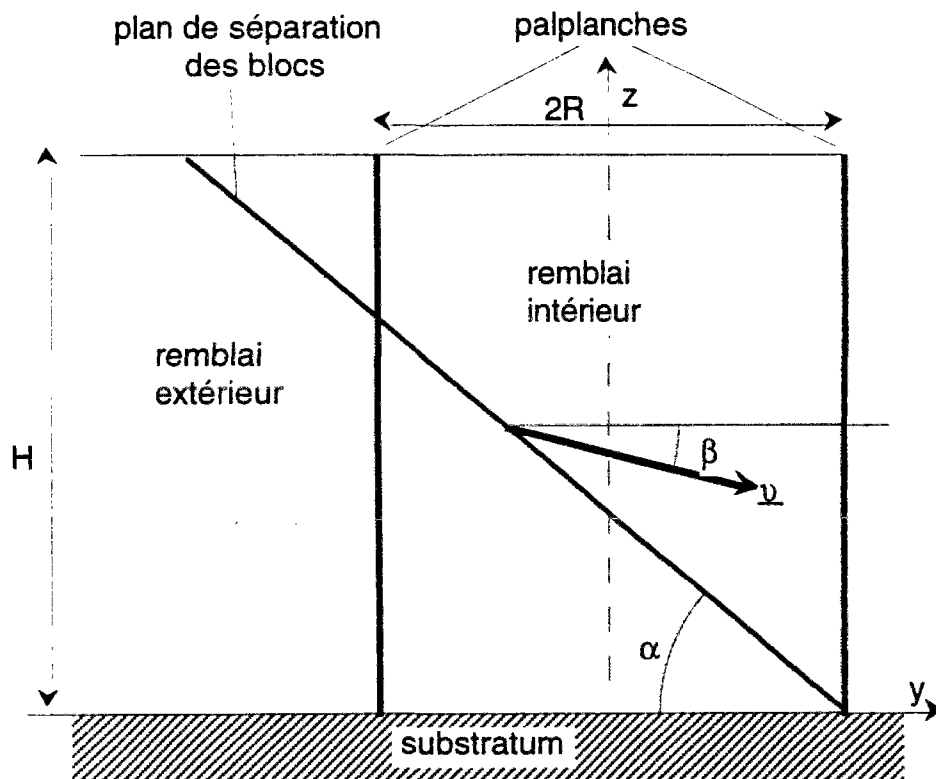


Figure 6-23 Mécanisme par blocs dans une gabionnade avec remblai extérieur. Vue en coupe passant par l'axe d'une cellule

## Étude cinématique de la gabionnade

Comme précédemment, nous allons régulariser ce mécanisme pour obtenir un mouvement de Kirchhoff-Love dans la coque. Ce mécanisme est obtenu exactement de la même façon ( 6-76).

Finalement le seul changement par rapport à la situation précédente portera sur l'expression de la puissance des forces extérieures. Pour  $\tan(\alpha) > \eta$ , on a la valeur déjà obtenue précédemment (rapportée à une portion de gabionnade de longueur  $2R$ ) :

$$P_e = 2\gamma \tan(\alpha - \varphi) \int_{\arcsin(1-\frac{\eta}{\tan(\alpha)})}^{\pi/2} d\theta \left( \int_{R(1-\frac{\eta}{\tan(\alpha)\sin(\theta)})}^R r dr \left( \int_{\tan(\alpha)(R-r\sin(\theta))}^H dz \right) \right) \quad (6-116)$$

Pour  $\tan(\alpha) < \eta$ , on a la nouvelle expression :

$$P_e = \gamma \frac{R(H - R \tan \alpha)^2}{\tan \alpha} + 2\gamma \tan(\alpha - \varphi) \int_0^{\pi/2} d\theta \left( \int_{R(1-\frac{\eta}{\tan(\alpha)\sin(\theta)})}^R r dr \left( \int_{\tan(\alpha)(R-r\sin(\theta))}^H dz \right) \right) \quad (6-117)$$

Comme pour le cas précédent, on utilise l'expression ( 6-108) de la puissance résistante maximale si  $\tan(\alpha) > \eta/2$  et le majorant ( 6-115) si  $\tan(\alpha) < \eta/2$ . On utilise la même définition que précédemment du facteur de confiance  $F_d$  qui est le majorant obtenu grâce au mécanisme considéré de la quantité  $\frac{\gamma^+ RH}{N_0 K_p}$ .

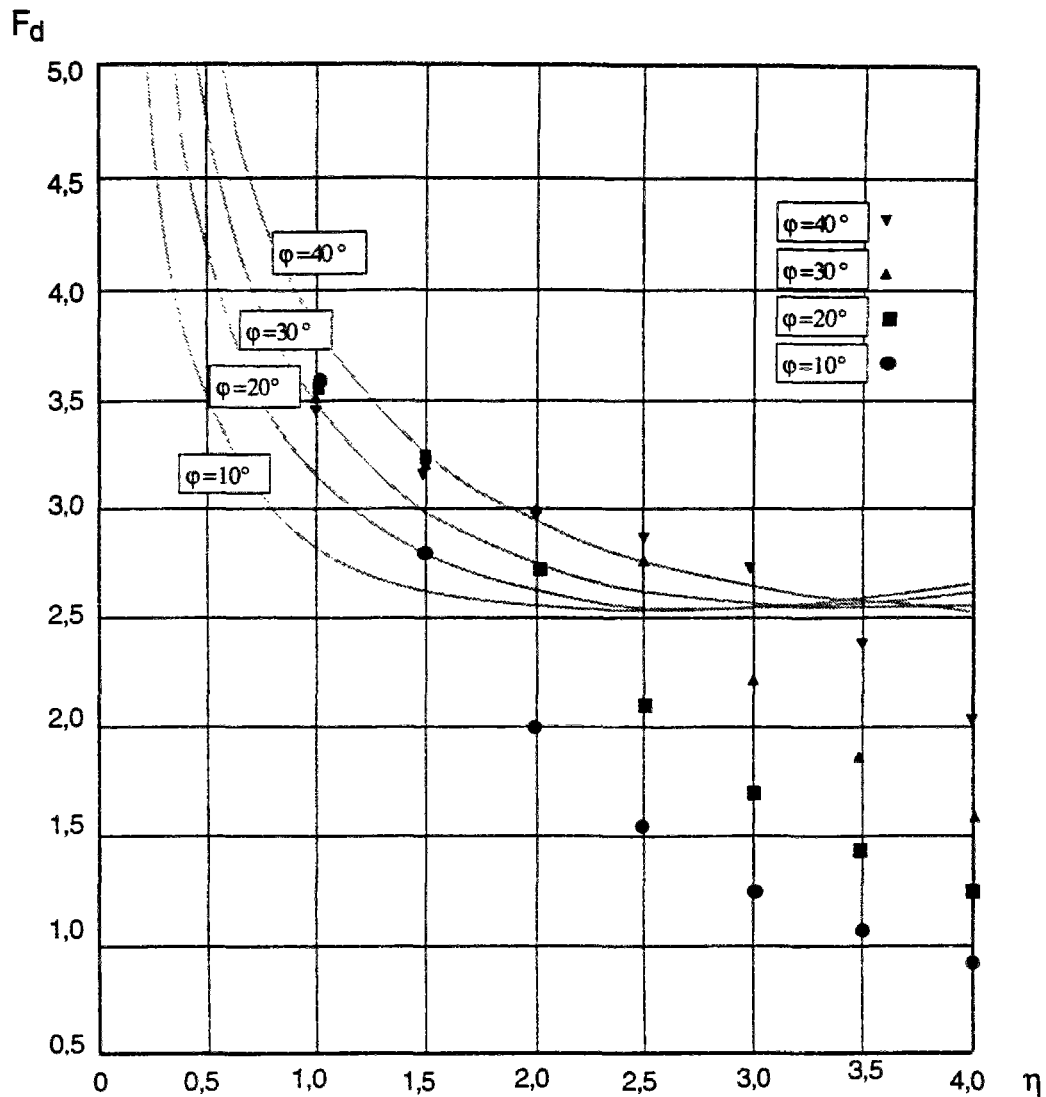


Figure 6-24 Facteur de confiance  $F_d$

Les points indiqués par des symboles correspondent au nouveau mécanisme de déformation dans la coque ; les courbes grisées sont obtenues avec un mécanisme par blocs dans la coque).

On voit que pour certaines valeurs des paramètres (angle de frottement interne petit, élanement grand), on observe un abaissement très sensible du facteur de confiance  $F_d$ . Le tableau ci-après indique pour chaque couple  $(\phi, \eta)$  si le facteur de confiance est ou non abaissé par rapport à la situation sans remblai extérieur.

	$\eta=1$	$\eta=1,5$	$\eta=2$	$\eta=2,5$	$\eta=3$	$\eta=3,5$	$\eta=4$
$\varphi=10^\circ$	non	oui	oui	oui	oui	oui	oui
$\varphi=20^\circ$	non	non	oui	oui	oui	oui	oui
$\varphi=30^\circ$	non	non	non	oui	oui	oui	oui
$\varphi=40^\circ$	non	non	non	non	non	oui	oui

Tableau 6-5 Influence ou non de la présence du remblai sur le facteur de confiance  $F_d$

#### 6.4.5 Étude d'une autre géométrie de gabionnade

Il est bien entendu possible d'étudier des configurations de gabionnade plus complexes que celle constituée de gabions juxtaposées. Nous allons présenter quelques résultats sur une géométrie de gabionnade considérée comme particulièrement défavorable, pour laquelle les rayons des cellules principales et des cellules de raccord sont égaux. Nous rappelons ci-dessous cette géométrie :

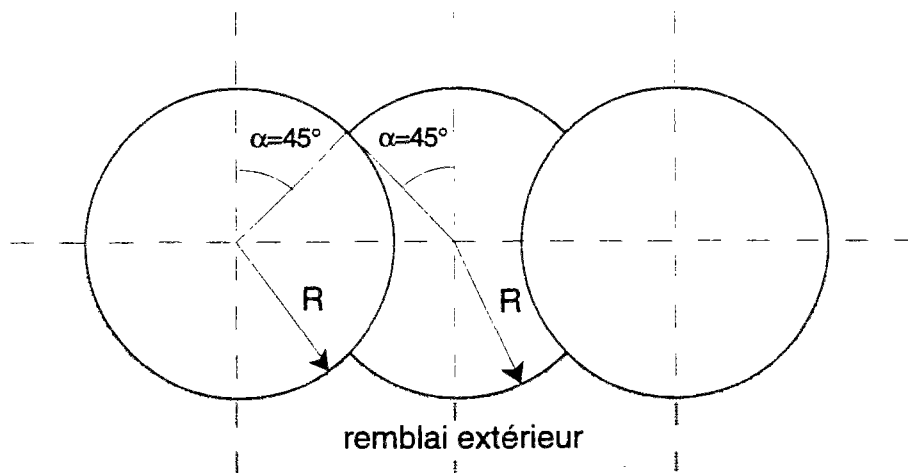


Figure 6-25 Configuration géométrique étudiée

Dans l'étude d'une gabionnade de ce type, on est amené à distinguer davantage de cas différents selon la valeur du paramètre  $\tan(\alpha)/\eta$ , pour exprimer la puissance des forces extérieures et de la puissance résistante maximale.

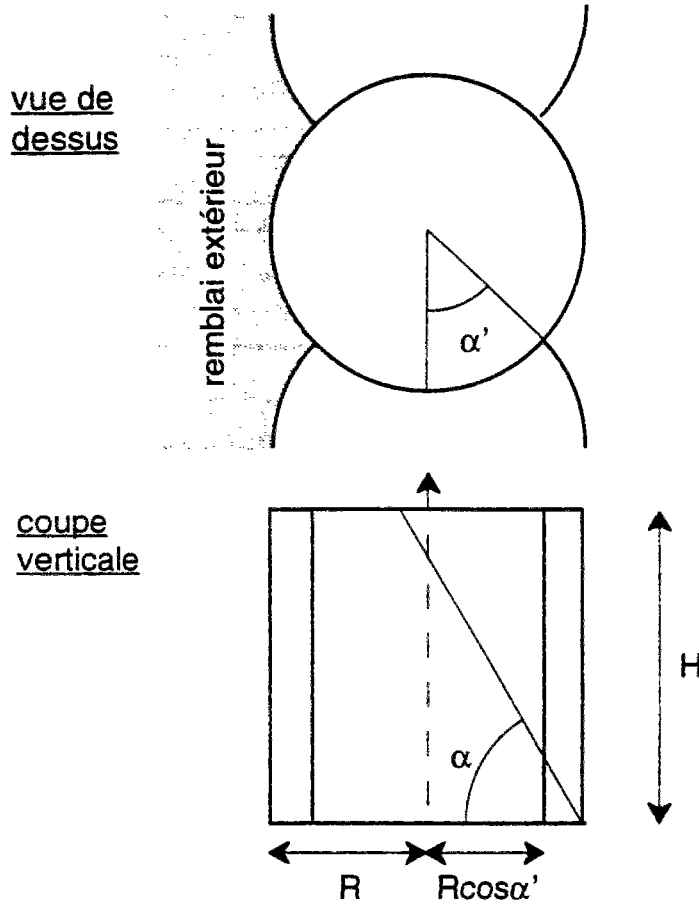


Figure 6-26 Étude des différents cas de figure selon le paramètre  $\tan(\alpha)/\eta$

Il faut distinguer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \alpha \geq \eta(1 - \cos \alpha') \\ \eta(1 + \cos \alpha') \geq \tan \alpha \geq \eta(1 - \cos \alpha') \\ \eta(1 + \cos \alpha') \geq \tan \alpha \geq 2\eta \\ 2\eta \geq \tan \alpha \end{array} \right. \quad (6-118)$$

Dans le cas de configurations géométriques telles que les deux plans tangents à l'ensemble des cellules principales n'est pas tangent aux cellules de raccord, le nombre de cas à étudier est plus élevé que ce qui est indiqué dans (6-118).

La méthode de calcul de la puissance résistante maximale et de la puissance des efforts extérieurs reste analogue à ce qui a été vu précédemment.

Dans le cas de la configuration géométrique retenue dans ce paragraphe (Figure 6-25), on procède à une optimisation portant sur l'angle  $\alpha$  et sur la hauteur  $h$  et ce pour différentes valeurs des paramètres d'angle de frottement interne du remblai  $\varphi$  et d'élancement de la cellule principale  $\eta$ . Le tableau suivant résume les résultats ainsi obtenus.

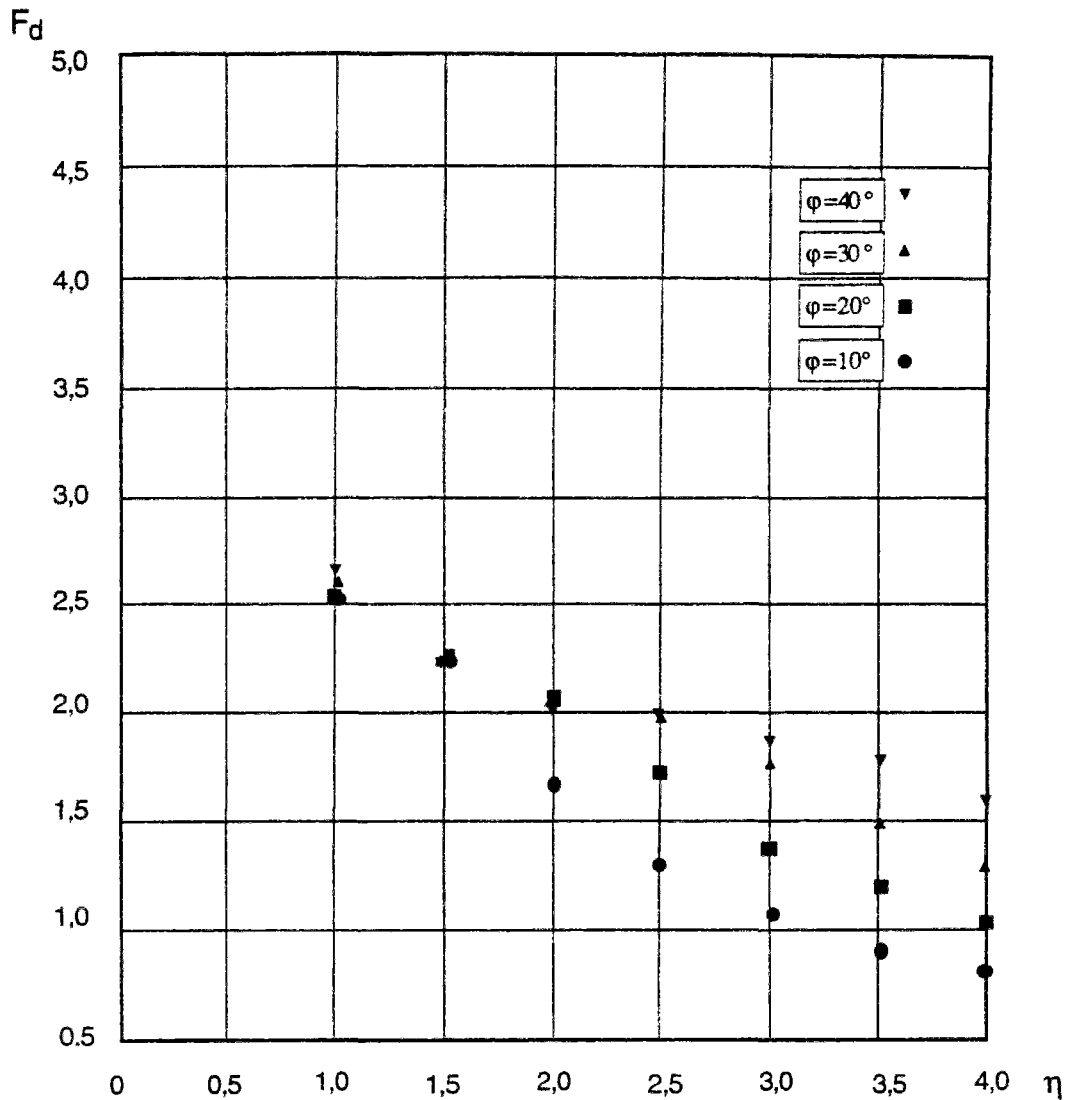


Figure 6-27 Facteur de confiance  $F_d$

L'examen de la figure précédente montre que le facteur de confiance est nettement plus bas que dans le gabionnade constituée de cellules juxtaposées en présence d'un remblai. Pour des valeurs réalistes de l'élancement et de l'angle de frottement interne du remblai, on trouve des valeurs de l'ordre de 2.

On peut évaluer l'effet de la résistance à la flexion ; pour  $\eta=2$ ,  $\phi=30^\circ$ , on obtient si la résistance à la flexion est nulle :  $F_d=1,91$  soit une diminution de l'ordre de 7% par rapport à notre calcul prenant en compte la résistance à la flexion (Figure 6-27).

#### 6.4.6 Conclusions

Par rapport à une cinématique par blocs dans la coque, la cinématique que nous avons construite permet la prise en compte de conditions d'appui simple ou d'encastrement à la base de la coque. Si on compare néanmoins les résultats de ces

deux cinématiques, on constate (Figure 6-21) que les résultats pour les valeurs usuelles des gabions ( $\eta$  de l'ordre de 2,  $\phi$  de l'ordre de  $30^\circ$  à  $40^\circ$ ) sont proches ou très proches, la cinématique par blocs dans la coque ayant l'avantage .

L'effet de la présence d'un remblai externe peut être très sensible mais plutôt pour des valeurs de l'élancement  $\eta$  et de l'angle  $\phi$  à la limite voire plutôt en dehors des valeurs recommandées usuellement pour ces paramètres. Ceci peut être considéré comme une confirmation du bien fondé de ces règles de dimensionnement. Ces résultats ont été obtenus pour un remblai externe de mêmes caractéristiques de résistance que le remblai interne. L'effet d'un remblai de caractéristiques mécaniques inférieures devrait a priori se traduire par un abaissement de la borne cinématique.

L'utilisation d'une configuration en plan connue pour être particulièrement défavorable (rayon de la cellule principale égal à celui de la cellule de raccord) se traduit par un abaissement sensible du facteur de confiance par rapport à la configuration, constituée de cellules juxtaposées (tangentes les unes aux autres) de l'ordre de 30% pour des valeurs usuelles des paramètres (comparer la Figure 6-24 et la Figure 6-27). Ceci corrobore le résultat analogue obtenu en §6-3 où l'abaissement du facteur de confiance avait été évaluée à 28%.

La prise en compte du frottement entre le remblai et le substratum se traduit, pour les cinématiques que nous avons envisagées en §6-4 (sans glissement) et en §6-3 (avec glissement) par une augmentation substantielle du facteur de confiance de l'ordre de 50% par rapport à la valeur obtenue avec glissement pour les valeurs usuelles des paramètres d'élancement et d'angle de frottement interne du remblai. Cet effet devient beaucoup moins sensible pour des valeurs plus grandes de l'élancement et plus faibles du frottement interne.

## 6.5 Récapitulatif

Rappelons les diverses cinématiques utilisées pour l'étude de la stabilité d'une gabionnade avec les principales hypothèses utilisées.

	remblai interne	interface substratum/remblai	condition au bord inférieur	prise en compte des effets hydrostatiques	remarques
cinématique par blocs dans le remblai et dans la coque (Buhan et al., 1992)	frottant	frottante	libre	oui	
cinématiques dans le remblai par zones « cylindriques » §6.2	purement cohérent	lisse	libre	possible <sup>1</sup>	étude de deux variantes de champs cinématiques, comparaison de plusieurs configurations de gabions circulaires
cinématique de déformation plane homogène §6.3	frottant	lisse	libre	oui	comparaison de plusieurs configurations de gabions circulaires
cinématique dans le remblai dérivée de la cinématique par blocs du rapport Buhan et al. §6.4	frottant	frottante	libre, appuyé simplement ou encastré	possible	prise en compte d'un remblai extérieur, étude numérique de deux configurations de gabionnade (cellules juxtaposées ou avec cellule de raccord)

Tableau 6-6 Tableau récapitulatif des diverses cinématiques pour la gabionnade

### Comparaison avec le rapport de Buhan et al. (1992)

Comme dans le cas du gabion isolé, nous avons essayé d'élargir les choix possibles de champs cinématiques dans l'enceinte de palplanches grâce à la modélisation coque de l'enceinte. Toutefois, par rapport au gabion isolé, l'absence de l'axisymétrie a rendu plutôt plus difficile l'amélioration des résultats

<sup>1</sup> Bien que nous ne soyons pas dans le cas où les contacts entre le remblai intérieur et la coque sont ponctuels, le fait qu'il n'y ait pas de discontinuité de vitesse normale entre la coque et le remblai permet encore de prendre en compte sans difficulté les effets hydrostatiques (§4.5).



antérieurs. Examinons la situation pour les diverses cinématiques que nous avons étudiées.

Dans le cas des cinématiques étudiées en 6.2, la comparaison n'est guère possible puisque le critère de résistance du remblai n'est pas le même.

Dans le cas de la cinématique étudiée en 6.3, on constate un abaissement de la borne cinématique qui est très sensible pour la majeure partie des conditions hydrauliques envisagées (Figure 6-15). Mais cette cinématique suppose l'interface substratum/remblai lisse, ce qui n'est pas représentatif des conditions normales de construction des gabions.

La cinématique envisagée en 6.4 est construite, pour ce qui concerne le remblai interne, à partir de la cinématique dans le remblai utilisée par Buhan et al. qui n'est, en fait, que légèrement modifiée. Les résultats antérieurs sont améliorés pour certaines valeurs des paramètres d'élancement et d'angle de frottement interne du remblai (Figure 6-21). Cette amélioration, quand elle a lieu, est obtenue pour une cinématique compatible avec des conditions au bord inférieur de la coque (du type bord simplement appuyé ou encastré) ; ceci n'est pas le cas de la cinématique par blocs dans la coque (Buhan et al.) qui impose que le bord inférieur soit être libre. Par ailleurs, cette cinématique peut aussi être utilisée dans le cas où le gabion au lieu de reposer sur un substratum rocheux est fiché dans un sol plus meuble.

Enfin la cinématique envisagée en 6.4 peut prendre en compte sans difficulté la présence d'un remblai externe (Figure 6-24, Figure 6-27). Pour certaines valeurs des paramètres, on met en évidence l'influence déstabilisatrice de la présence du remblai (Tableau 6-5). Dans ce cas, l'amélioration par rapport aux travaux antérieurs est accrue (Figure 6-24), puisque ces travaux ne permettaient pas de prendre bien en compte cette influence.

### **Influence des paramètres d'élancement et d'angle de frottement interne du remblai**

Les cinématiques étudiées en 6.3 et 6.4 semblent mettre en évidence l'effet défavorable d'un élancement élevé et l'effet favorable d'un angle de frottement interne élevé (le facteur  $F_d$  est croissant en fonction de  $F_d$  alors même que dans la condition cinématique de stabilité ce facteur est multiplié par  $K_p$ ). Ceci est mis en évidence dans le cas de la cinématique du 6.4 et est particulièrement net dans le cas où il y a un remblai extérieur (Figure 6-24, Figure 6-27). On constate alors des effets de seuil : le facteur  $F_d$  dépend très peu de l'angle de frottement interne pour les faibles élancements puis en dépend rapidement. Ceci correspond à un changement du type de champ cinématique optimal (selon que la cinématique optimale respecte ou non la condition  $H \geq 2R \tan \alpha + h$ ).

Cette dernière remarque doit être rapprochée de certaines règles de l'art portant sur l'élancement maximal des cellules (voir par exemple Pernier, 1980) et sur les caractéristiques recommandées pour le remblai (voir par exemple EAU, 1990).

### **Comparaison des différentes configurations géométriques de gabionnade**

Les cinématiques étudiées en 6.2 et 6.3 se prêtent à la comparaison des diverses configurations géométriques de gabionnades entre elles. Chaque cinématique fournit un facteur de confiance qui peut servir d'indicateur pour comparer la stabilité des diverses configurations. Les critères issus de 6.2 et de 6.3 indiquent tous les deux la même configuration comme étant la plus défavorable parmi trois configurations étudiées, confirmant ainsi les appréciations de divers auteurs sur cette configuration (voir notamment Lacroix et al., 1970). En revanche, dans deux autres cas, il y a une divergence dans le classement. Ceci ne doit pas surprendre puisque que les deux cinématiques utilisées présentent des différences très importantes sur la forme générale du champ de vitesse dans le remblai et dans la coque, sur les conditions aux limites et sur le critère de résistance du remblai.

En ce qui concerne le cas où il y a un remblai extérieur, la cinématique étudiée en 6.4 montre également des écarts importants entre les deux configurations géométriques étudiées l'une très stable (cellules juxtaposées) l'autre déconseillée (cellule de raccord ayant même rayon que la cellule principale).



## 7. Comparaison avec les résultats antérieurs

*Au cours des chapitres précédents, nous avons déjà effectué la comparaison de nos résultats avec les résultats antérieurs obtenus par le calcul à la rupture. Nous nous proposons maintenant d'élargir la base de comparaison à d'autres méthodes de calcul. La comparaison va s'avérer plus délicate car ces méthodes ne relèvent pas de la théorie du calcul à la rupture.*

*Nous envisagerons notamment les résultats de mesures effectuées sur des ouvrages réels et l'étude de cas d'accidents (§7.1). Un des cas d'accidents donnera lieu à une modélisation cinématique. Nous passons ensuite à la comparaison avec les résultats d'essais sur modèles réduits (§7.2), et avec les méthodes de dimensionnement utilisées de manière courante (§7.3).*

### 7.1 Comparaison avec des ouvrages réels

#### 7.1.1 Instrumentations d'ouvrages réels

Un certain nombre d'ouvrages réels ont été instrumentés. On peut citer notamment :

- batardeaux pour la construction de l'usine marémotrice de la Rance (1961) ; les résultats sont résumés par Pilot (1979), le rapport EDF étant encore confidentiel (Raud, 1969).
- digue du port de Long Beach en Californie (White et al., 1963).
- batardeau pour la construction d'une nouvelle écluse au port de Dunkerque (Bailly et al., 1969).
- quai du terminal 4 du port de Portland (Schroeder et al., 1977)
- quai du port de Umm Said au Qatar, (Ghali, 1981).
- cale sèche de Trident, Bangor, état de Washington, (Sorota et al., 1981).
- écluse et barrage 26 sur le Mississippi, près de Alton, Illinois, (Clough et Goeke, 1986).
- terminal 6 du port de Portland, Oregon, (Schroeder, 1987).

Les mesures ont porté généralement sur la déformation et le déplacement de l'enceinte de palplanches et sur les efforts dans les palplanches, le plus souvent une palplanche située sur le devant à mi-distance des raccords entre cellules. On peut ainsi tirer une estimation du coefficient de poussée des terres sur la face aval de la gabionnade.

Des mesures complémentaires ont été parfois exécutées, relatives notamment à la pression interstitielle, au tassement, à l'inclinaison.

## Chapitre 7

ouvrage	type d'ouvrage	hauteur	rayon des cellules principales	déplacement vertical	déplacement horizontal	lieu de la tension maximale	coefficients de poussée des terres	remarques diverses
Rance	batardeau	19,5m	9,5m, raccords en Y		10 cm en tête, mouvement de 1 à 1,5 cm à chaque marée	maxi à H/3 ou H/4	de 0,11 à 0,75	le poids spécifique en place a été plus petit que prévu ; les contraintes horizontales ne varient guère ; les contraintes verticales augmentent dans le temps
Long Beach	quai	20,4 m dont 5,8 m de fiche	9,4 m, raccords en T	de 0,3 à 1 m pour le remblai après deux ans	0,7 m après deux ans		0,66 en cours de remplissage par voie hydraulique et 0,54 après	
Dunkerque	batardeau	13m hors fiche, environ 10 m de fiche	9,5m raccords en Y	20 à 30 cm		a priori près du sol pour le côté enceinte	côté enceinte de 0,25 à 0,45, les mesures de tension conduisent jusqu'à plus de 0,6	d'une palplanche à l'autre la valeur d'une contrainte peut varier du simple au double effet de silo sur le bord du remblai dû au frottement
terminal 4	quai	18,4m plus fiche de 8,6m (face aval)	10m, raccords en T	tassement moyen de 20 cm pendant la construction, 5 cm deux ans après	maxi male en tête sur côté libre : 23 cm, elle augmente toujours pendant la construction beaucoup plus faible sur le côté amont 5 cm maxi,	la force maximale est au niveau de la cote de dragage ou nettement au dessus.	en moyenne 0,5 après remplissage 0,4 après 5 jours mais de grandes variations ; l'auteur conclut que Terzaghi est valable;	le remplissage des raccords diminue les tensions ; le compactage par vibration ne crée pas des surcharges pires que les autres phases de la construction et diminue la force en dans la zone basse ; force maxi au remplissage
Umm Said	quai	17,25m	7,65m raccords en T					étude orientée vers les palplanches de raccord
Trident	batardeau (cale sèche)	24,6m (fiche de l'ordre de 2m)	11,5m, raccords en Y	de l'ordre de 1,3 cm	maxi 10 cm après l'assèchement du batardeau	plutôt H/8	de 0,28 à 0,45. la variation verticale (croissante ou non) de K dépend des moments de la vie de l'ouvrage	augmentation de la tension pendant le compactage, différence d'une cellule à l'autre
écluse 16	batardeau	18m hors fiche ; fiche de 10,6m	9,1m, raccords en Y				le coefficient serait décroissant avec la profondeur	étude plutôt orientée remblai
terminal 6	quai	18 m hors fiche, fiche de 6m	10m, raccords en Y	tassement 20 cm après construction, 25 2 ans après	25 cm maxi après construction, 38 cm 6 ans après	le point de gonflement maximal est entre 0,08 et 0,25 H		étude orientée vers les déplacements ; les capteurs de contraintes n'ont pas résisté au battage

Tableau 7-1 Mesures in situ sur divers ouvrages

Le tableau précédent montre l'assez grande diversité des résultats obtenus lors de mesures in situ. Si on regarde de manière plus détaillée les résultats de chaque étude, on relève que de grandes différences quant aux tensions peuvent exister sur une même gabionnade d'une palplanche à l'autre, d'une cellule à l'autre.

La règle de dimensionnement de Terzaghi fixant le lieu de la tension maximale au tiers ou quart de la hauteur libre du gabion paraît battue en brèche par un certain nombre de sites d'expériences dont ceux qui étaient le mieux équipés pour trancher cette question, grâce à des capteurs placés très bas (batardeau de la cale de Trident).

L'effet du compactage par vibration reçoit des appréciations variées. Selon certaines observations, l'augmentation des tensions en cours de vibration ne crée pas de surtensions supérieures à celles que connaît l'ouvrage pendant d'autres phases de la construction. C'est la conclusion notamment de l'étude du terminal 4 (augmentation maximale de 25% de la tension, pas de risque de liquéfaction générale du remblai). Au contraire, le cas du port de Umm Said montre que la vibration des cellules de raccord conduit à des augmentations de contraintes inadmissibles et même à la rupture des palplanches de raccord. Il faut souligner que le matériau utilisé pour cette gabionnade était sensible à la liquéfaction.

De même l'effet du remplissage des cellules de raccord fait l'objet de conclusions apparemment divergentes. Dans le cas du port de Umm Said, le remplissage de l'arc secondaire induit des contraintes dépassant la limite d'élasticité dans la partie cloison commune de la palplanche de raccord. Dans le cas de la cale de Trident, les mesures indiquent que la tension dans la cloison commune près du raccord est entre 1 et 1,2 fois la tension du côté libre. La conclusion est donc une influence relativement faible de la présence du raccord. Une telle différence peut être au moins partiellement expliquée par la différence de configuration des raccords et par le fait que les contraintes observées au port de Umm Said sont surtout dues à un effort de flexion, alors que pour la cale de Trident ce sont des tensions qui sont évoquées.

Enfin, une certaine unité se fait autour de l'idée que la fin du remplissage du gabion par voie hydraulique est une phase critique, avec un coefficient de poussée des terres plus élevé (White et al., 1963), (Schroeder et al., 1977), et une grande hauteur d'eau dans le gabion.

Ces diverses mesures effectuées sur des ouvrages réels nous renseignent sur le comportement de ces ouvrages. On obtient ainsi des données sur les déplacements qu'il n'est pas possible d'obtenir par le calcul à la rupture. On obtient aussi des données sur la répartition des efforts pendant les différentes phases de la vie de l'ouvrage. Ces données peuvent éventuellement servir de guide pour la construction de statiques ou de cinématiques.

Nos calculs seraient remis en cause par l'existence d'ouvrages résistants dont ils auraient prévu la ruine. Considérons la stabilité de la cellule de gabion isolée qui est une des phases de construction de l'ouvrage. Prenons en compte un élancement de l'ordre de 2 et un angle de frottement interne de 30°, l'état à la fin du remplissage, le gabion étant supposé plein d'eau et le niveau à l'extérieur étant supposé au niveau de la surface du sol (hypothèse très défavorable).

Nos résultats cinématiques donnent alors la condition nécessaire suivante pour que l'ouvrage soit stable :

$$(\gamma' + K_a + \gamma_w)H \leq 2,3 \frac{N_0}{R} \quad (7-1)$$

Les divers articles étudiés ne fournissent pas toujours l'ensemble des données nécessaires ; essayons néanmoins de faire un calcul dans le cas de Long Beach. On prend :

$$N_0 \approx e \cdot \sigma_e \approx 3371 \text{ kN/m} ; H = 14,6 \text{ m} ; R = 9,4 \text{ m} ; \varphi = 30^\circ ; \gamma' = 14 \text{ kN.m}^{-3} \quad (7-2)$$

Dans le doute, les paramètres ont été choisis du côté de la sécurité. C'est le cas de  $N_0$ , évalué à partir de l'épaisseur et de la limite élastique, de l'angle de frottement interne. En remplaçant ces diverses valeurs dans la condition (7-1), on trouve :

$$(14,0,33 + 10) \cdot 14,6 \approx 213 \leq 825 \approx 2,3 \frac{3371}{9,4} \quad (7-3)$$

Si on avait fait l'hypothèse pénalisante supplémentaire qu'il n'y a pas de frottement à la base entre le remblai et le substratum, on aurait vérifié encore la compatibilité de la tenue de la cellule isolée de la gabionnade de Long Beach et de nos calculs cinématiques.

Les cinématiques que nous avons développées pour les gabionnades pourraient également être envisagées. Comparons notamment avec la cinématique du §5.3, (qui nécessite l'hypothèse pénalisante de l'interface remblai/susbtratum lisse). On a compte tenu du tableau 6-4, la relation suivante analogue de (7-1) :

$$(\gamma' + K_a + \gamma_w)H \leq 1,82 \frac{N_0}{R} \quad (7-4)$$

On vérifie encore qu'avec les données numériques de (7-2), la condition que nous venons d'écrire est satisfaite.

### 7.1.2 Etude de cas d'accidents

Lacroix et al. (1970) ont procédé à un recensement des accidents survenus à des gabions. Rappelons ci-dessous les principaux résultats de cette enquête :

mode de rupture	nombre de cas recensés
glissement sur la base	1
glissement dans le rocher au-dessous de la base	2
rupture des palplanches de connexion et des serrures à côté de ces palplanches	plusieurs
cisaillement d'un remblai limoneux ou argileux	plusieurs
submersion d'une cellule	1
affouillement et perte du remblai	plusieurs
rupture d'une serrure déficiente	1
battage hors de la serrure	2
soudure de deux palplanches de caractéristiques différentes	1
retrait prématuré des lignes de retenue	1
impact de navire	1

Tableau 7-2 Recensement des causes d'accidents d'après Lacroix et al. (1970)

Les auteurs précisent que la cause la plus fréquente semble être une rupture à la palplanche de connexion ou près de cette palplanche que la connexion soit assurée par une palplanche soudée ou rivetée.

Grayman (1970) a également étudié les accidents de structures cellulaires et fourni des illustrations. Les causes principales selon lui sont :

- rupture de palplanches de connexion soudées en T et, à moindre degré, de palplanches de connexion rivetées en T
- saturation du remblai intérieur
- non prise en compte dans la conception de la tension induite sur la cellule principale par les cellules de raccord

On voit que les accidents ont été relativement nombreux. Il est en revanche difficile de trouver des articles ou des rapports publics décrivant et analysant les accidents.

On peut citer comme donnant des indications relativement précises sur un accident et ses causes :

- darse 2 de Fos-sur-Mer (Guérin P., 1982)
- batardeau pour la construction du barrage des « portes de fer » (Focsa et Klenk, 1983)



- quai du port de Umm Said au Qatar (Ghali, 1981)
- batardeau pour la construction du barrage et de l'écluse de Uniontown (Indiana). (Thomas et al., 1975), (Smith, 1989).

L'accident de Uniontown s'est traduit par un glissement de plusieurs cellules vers le centre du batardeau et certaines ont fini par rompre. L'accident s'est produit alors que le batardeau avait été asséché depuis 10 jours. Le déplacement a atteint jusqu'à 22 m. Cet accident est imputé à des causes géologiques : la présence à environ 4,5m sous la roche de charbon et de schistes argileux avec probablement une pression interstitielle élevée.

L'accident des « portes de fer » a été l'objet d'une présentation détaillée (Focsa et Klenk, 1983) environ 13 ans après les faits. L'accident s'est produit brusquement alors que le batardeau était en place depuis 6 ans. L'analyse approfondie ne permet pas de conclure de manière définitive sur la ou les causes de l'accident. Les auteurs envisagent la superposition de plusieurs causes qui se sont développées pendant la vie de l'ouvrage : modification du matériau de remplissage suite aux infiltrations, efforts répétés, chocs microsismiques répétés, efforts locaux dans les palplanches consécutifs à des mouvements même faibles des cellules. En conclusion, ils recommandent principalement d'augmenter les coefficients de sécurité pour les batardeaux appelés à fonctionner sous charge pendant plusieurs années ainsi que de renforcer les mesures de suivi de l'ouvrage.

L'accident de la darse 2 du port de Fos-sur-Mer, s'est traduit par trois dégrafages de serrures situées côté mer concernant la palplanche de raccord ou des palplanches assez proches. Ces dégrafages sont intervenus environ 7 ans après la construction de l'ouvrage. Guérin (1982) met ces accidents en relation avec les difficultés survenues lors du battage qui s'est traduit par des déformations importantes des palplanches ainsi que de nombreuses opérations d'arrachage et de reprise avec des difficultés lors de la fermeture des cellules. L'accident serait dû en définitive à des dégrafages en cours de battage sous le niveau de dragage, ce qu'il fait qu'ils n'ont pas pu être détectés. Ces dégrafages auraient ensuite évolué lentement jusqu'à causer des pertes de remblai qui ont entraîné des effondrements en surface.

L'accident de Umm Said est sans doute le plus intéressant de notre point de vue, car il met en cause directement la conception des cellules de gabions et réalise quasiment une expérience reproductible de ruine de la structure. Pendant la construction, trois palplanches de raccord en T se sont rompues au moment du vibro-compactage du remblai dans les cellules. L'analyse des palplanches rompues a montré que la rupture s'était produite en dehors des soudures dans une zone affectée thermiquement par un traitement destiné à redresser la palplanche après soudage. L'examen de la cassure montrerait qu'il s'agit essentiellement d'une rupture ductile.

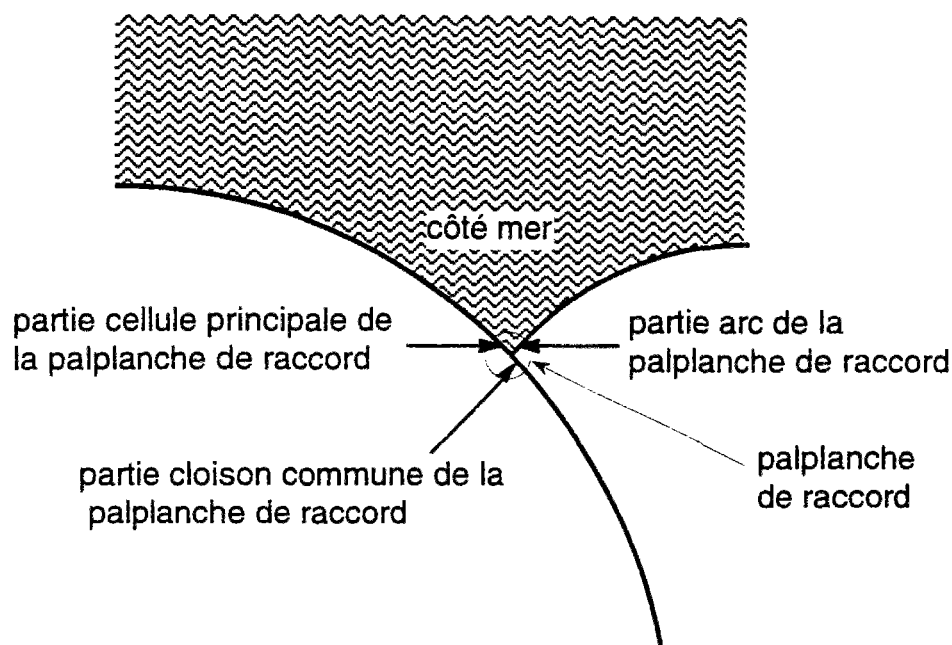


Figure 7-1 Localisation des zones de rupture sur la palplanche de raccord

Selon les accidents, le lieu de la première rupture, éventuellement suivie d'une seconde rupture, peut varier comme le montre le tableau suivant.

	localisation de la première rupture	localisation de la seconde rupture
premier accident	partie cloison commune	
deuxième accident	partie cellule principale	partie cloison commune
troisième accident	partie cloison commune	partie cellule principale

Tableau 7-3 Déroulement des trois ruptures de palplanches de raccord

On note que la partie arc n'a jamais été le lieu de la rupture. A chaque fois la rupture est intervenue quand l'aiguille de vibration était dans la cellule de raccord, relativement proche de la palplanche de raccord (2 à 4,5 m).

Suite à cet accident, un programme de mesures in situ a été décidé, comme nous l'avons signalé précédemment. Il a montré l'apparition de contraintes de flexion très importantes dans la partie « cloison commune » et une augmentation importante des contraintes de traction dans la partie « arc de raccord » de la palplanche de raccord lors du vibro-compactage du remblai de la cellule de raccord.

La vibration de la cellule principale induit une augmentation des contraintes que Ghali estime explicable par une liquéfaction partielle du remblai de la cellule de raccord. Cette augmentation disparaît quand on cesse la vibration. La vibration de la

cellule de raccord a été arrêté au bout de 140 s, car les contraintes dans la partie « cloison commune » de la palplanche de raccord avaient déjà augmenté de 160 MPa.

Les cinématiques que nous avons développées au chapitre 5 ne prennent pas en compte une telle phase de compactage avec des phénomènes de liquéfaction. Nous allons proposer maintenant une modélisation possible de cette situation.

### 7.1.3 Cinématique prenant en compte une liquéfaction partielle du remblai de la cellule de raccord

Nous allons envisager une cinématique où l'essentiel de la déformation est concentré dans une zone très proche du raccord entre les cellules. La figure ci-après montre la localisation des rotations concentrées (rotules plastiques) et l'allure de la déformée (en grisé).

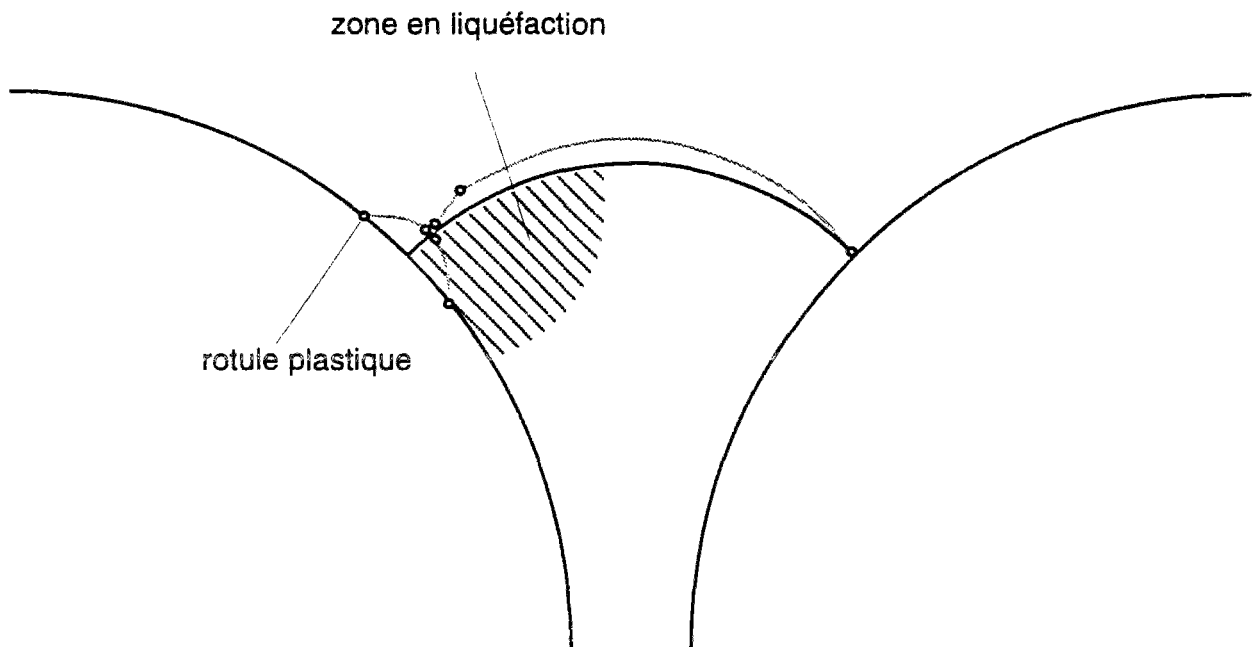


Figure 7-2 Cinématique avec déformations concentrées autour du raccord

Nous modéliserons la zone liquéfiée comme étant en équilibre hydrostatique. Notons que si l'interface palplanche/remblai n'est pas adhérente, la cinématique esquissée ci-dessus est pertinente si le remblai de la cellule principale reste immobile.

Le système que nous considérerons sera limité à la coque. Celle-ci sera soumise, en dehors de la zone en contact avec le remblai liquéfié, à une condition cinématique de non-pénétration dans le remblai. Dans la zone en contact avec le remblai liquéfié, comme on considère que celui-ci est en équilibre hydrostatique, la condition imposée à la coque sera une distribution hydrostatique de pression.

Nous allons d'abord optimiser la cinématique concernant la cloison commune et la cellule principale.

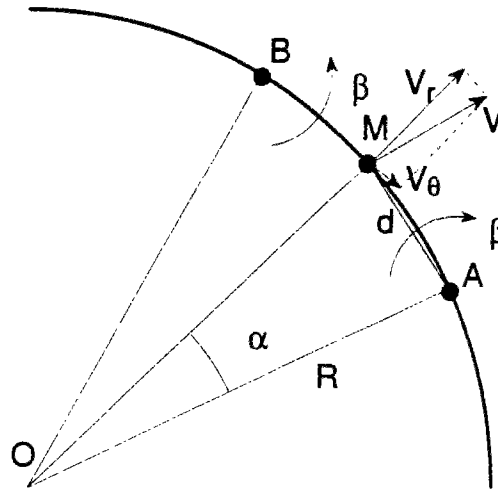


Figure 7-3 Optimisation de la cinématique pour la cellule principale

On suppose que la partie AM de la coque suit un mouvement de rotation de vitesse angulaire  $\beta$ . Le point M est alors animé d'une vitesse  $V = \beta d$  qui se décompose en une partie radiale  $V_r$  et une partie tangentielle  $V_\theta$ . La rotation de la partie symétrique BM avec la vitesse angulaire  $-\beta$ , donne la même vitesse radiale mais une vitesse tangentielle de signe opposé.

En supposant  $\alpha$  petit, on a les expressions simplifiées suivantes :

$$\beta \approx \frac{V_r}{\alpha R}; V_\theta \approx \alpha V_r \quad (7-5)$$

On en déduit l'expression suivante pour la puissance résistante maximale mise en jeu dans l'enceinte de la cellule principale avec le mouvement de AM et de BM en prenant un critère sans interaction<sup>1</sup> entre l'effort normal et le moment fléchissant et en considérant une tranche de hauteur unité :

$$P_{rm} = V_r \left( \frac{4M_0}{\alpha R} + 2N_0 \alpha \right) \quad (7-6)$$

Pour une vitesse radiale du point M fixée, on optimise la cinématique en choisissant l'angle  $\alpha$ .

$$\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{2M_0}{RN_0}} \quad (7-7)$$

En prenant  $N_0 = \sigma_0 e$  ;  $M_0 = \sigma_0 e^2 / 4$ , on trouve :

$$\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{e}{2R}} ; d = \sqrt{\frac{Re}{2}} \quad (7-8)$$

<sup>1</sup> Cette hypothèse surestime la puissance résistante maximale en M.

La zone en déformation a une largeur de  $2d$ . Faisons une évaluation numérique avec les caractéristiques de la gabionnade de Umm Said. On a :  $R = 7,64\text{m}$  ;  $e = 12,7\text{mm}$ . On en déduit  $2d \approx 0,44\text{m}$ , soit à peu près la largeur d'une palplanche ( $0,425\text{m}$ ). On constate que les simplifications faites ( $\sin\alpha \approx \alpha$  ;  $\cos\alpha \approx 1$ ) étaient justifiées puisque  $\alpha \approx 0,029\text{ rad}$ .

Il faut compléter maintenant par la cinématique dans l'arc de raccord. Nous allons maintenant, dans un souci de simplicité, traiter le cas particulier où les angles ont les valeurs retenues à Umm Said.

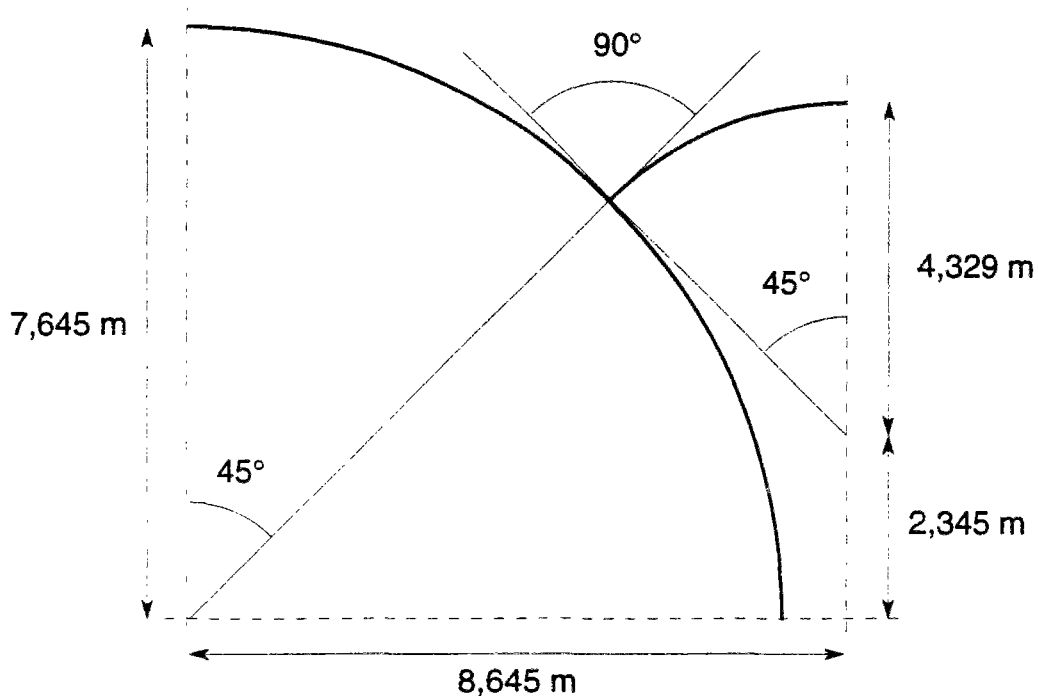


Figure 7-4 Géométrie de la gabionnade de Umm Said

On peut alors déterminer la cinématique dans la coque en supposant qu'il y a trois rotules plastiques, une au point M de raccord, au point N situé à la distance  $d$  de M et à P point de raccord symétrique de M et situé à la distance  $d'$  de celui-ci.

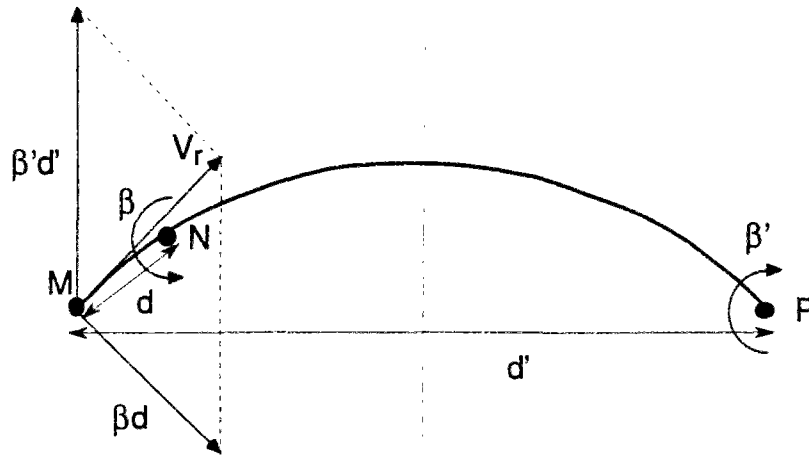


Figure 7-5 Détermination des vitesses dans l'arc de raccord

Du fait de la rotule située en P, la rotation de vitesse angulaire  $\beta$  autour de cette rotule apporte une contribution  $\beta'd'$  à la vitesse du point M. L'autre contribution à la vitesse du point M est due à la rotation autour de N et vaut  $\beta d$ . Comme précédemment, on utilise que  $d$  est petit devant le rayon (et devant  $d'$ ) pour simplifier les calculs. On trouve, avec les angles de la géométrie de Umm Said :

$$\beta = \frac{V_r}{d}; \beta' = \sqrt{2} \frac{V_r}{d'} \quad (7-9)$$

On note que la vitesse angulaire  $\beta$  utilisée pour l'arc secondaire est finalement la même que celle qui intervient dans la cinématique de la cellule principale. La puissance résistante maximale s'écrit finalement pour une tranche de gabionnade de hauteur unité :

$$P_{rm} = (5M_0\beta + M_0\beta' + 2\frac{N_0d^2}{R}\beta) \approx (5M_0 + 2\frac{N_0d^2}{R})\beta \quad (7-10)$$

Il faut maintenant évaluer la puissance des efforts extérieurs ; ils sont dus à la pression exercée par la zone liquéfiée.

La longueur  $d''$  est la distance entre le point L limite de la partie en contact de la zone en liquéfaction avec l'arc de raccord (Figure 7-6).

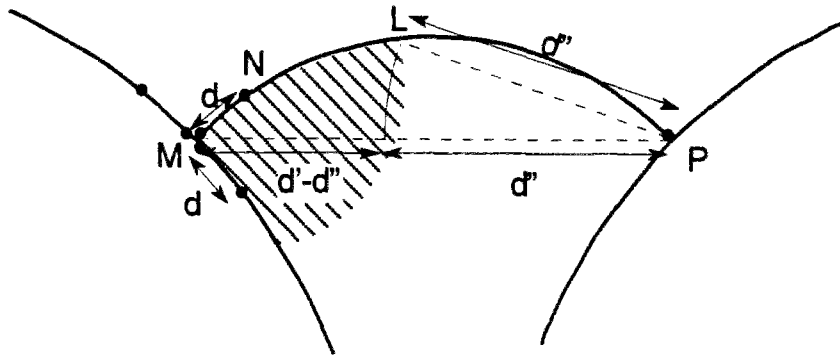


Figure 7-6 Détermination de la puissance des forces extérieures

On trouve finalement l'expression suivante de la puissance des forces extérieures pour la tranche de gabionnade d'épaisseur unité située à la profondeur H:

$$P_e = \left( -2 \frac{d^2 \beta}{2} + \beta' \frac{d'^2 - d''^2}{2} \right) \gamma H = \left( -d + \sqrt{2} \frac{d'^2 - d''^2}{2d'} \right) \beta \gamma H d \quad (7-11)$$

Passons à une évaluation numérique avec les données de Umm Said. On prend  $d' = 6,122$  m ;  $d'' = 4$  m. Ceci correspond à une extension horizontale de 2 m environ de la zone en liquéfaction. On prend comme poids volumique du remblai en liquéfaction  $22 \text{ kN.m}^{-3}$ . La hauteur H vaut 15 m. On vérifie alors qu'en choisissant pour d la valeur de  $0,216 \text{ m}^2$ , on a  $P_e > P_m$ .

On voit que sous les hypothèses prises, qui correspondent à une liquéfaction d'une zone ayant une extension horizontale d'environ 2 m et intéressant toute la hauteur du gabion, le gabion est instable<sup>3</sup>. Cette extension de la zone en liquéfaction paraît compatible avec les observations : lors des ruptures, l'aiguille de vibration était à des distances de 2 m à 4,5 m de la palplanche de raccord. Dans un des cas au moins, la rupture est intervenue quand l'aiguille était parvenue jusqu'à la base de la cellule et était en train d'être remontée. On note cependant que la cinématique que nous avons considérée correspond à des changements angulaires importants pour des déplacements petits à l'échelle de la structure. Ceci laisse la possibilité de réarrangements géométriques stabilisateurs qui ne peuvent pas être pris en compte par le calcul à la rupture. De tels effets ont été étudiés pour des plaques ou des coques « rigides-plastiques » notamment par Gao (1995, 1996).

En conclusion, cette étude cinématique permet une modélisation des problèmes rencontrés à Umm Said.

<sup>2</sup> Les calculs sont effectués en considérant l'enceinte de palplanche comme une coque homogène. On pourrait prendre en compte la présence des serrures, en choisissant d de telle sorte que les points A et B coïncident avec des serrures. Il faut alors modifier l'expression de la puissance résistante maximale (7-10).

<sup>3</sup> La prise en compte plus précise de la géométrie 3D du gabion nécessite ou de multiplier  $P_m$  par H et  $P_e$  par H/2, ou de construire une cinématique plus complexe où la déformation est localisée vers la base tandis que le reste de la coque est immobile avec un raccordement à effectuer entre ces deux zones.

## 7.2 Comparaison avec des essais sur modèles réduits

### 7.2.1 Présentation des essais réalisés sur modèles réduits

Des études sur modèles réduits ont été réalisées depuis au moins 1944 (Polivka) et se sont étendues au moins jusqu'en 1979 (Maitland et Schroeder). Les principales caractéristiques des modèles utilisés sont résumées ci-dessous.

	remblai	substratum	modèle bi ou tri dimen- sionnel	paroi	dimension
Polivka (1944)	sable	rigide	tri	coque continue en métal	15 cm de hauteur
Cummings (1957)	pierres concassées diamètre maximal = 1,2 cm	rigide	tri, forme circulaire ou rectan- gulaire	tasseaux de bois de section 0,8 cm×3,8 cm cerclés par du fil de fer ou des tasseaux	61 cm de hauteur
Schneebeli et Ca- vaillé-Coll (1957)	rouleaux de dura- lumin	rigide	bi	rigides reliées en tête par un tirant	15 et 30 cm entre parois
	sable	rigide	bi	idem	18 cm entre parois
	sable	rigide	tri	lattes de bois plus toile	20 cm de diamètre
Mazurkiewicz (1972)	sable	sable	bi	divers modules d'élasticité	
Albert et al. (1972)	rouleaux de dura- lumin	rigide	bi	rigides fixées en pied	40 cm à 1,30 m en- tre parois
	sable ou billes de polysty- rène ou graines	rigide	tri	profilés en plasti- que simulant des palplanches à grand module	37,5 et 75 cm de hauteur
Burki et Richards (1975)	gélatine	gélatine	bi	plaques d'uréthane reliées par deux hauteurs de tirants	5,1 cm entre parois
Maitland et Schroeder (1979)	sable	sable	tri	modèles réduits de palplanches en acier	61 cm et 1,24 m de diamètre

Tableau 7-4 Présentation synthétique des essais sur modèles réduits

Il conviendrait d'ajouter à ce tableau le travail d'Ovesen (1962) que nous n'avons pas pu nous procurer.



D'emblée, on peut distinguer les travaux réalisés sur des modèles bidimensionnels et ceux réalisés sur des modèles tridimensionnels. Les modèles bidimensionnels présentent l'avantage d'une plus grande simplicité de réalisation et surtout d'une plus grande facilité d'interprétation des résultats grâce à des modélisations théoriques bidimensionnelles des gabions largement utilisées pour le dimensionnement.

Les essais de Burki et Richards constituent un cas particulier ; ce sont les seuls à avoir utilisé les techniques de la photoélasticité. Pour les autres essais, on constate une tendance à utiliser des modèles de plus en plus grands. D'autres perfectionnements liés à ce changement d'échelle portent sur la modélisation des palplanches, en essayant d'avoir une flexibilité la plus représentative possible. Les travaux de Maitland et Schroeder représentent à cet égard le terme actuel d'une évolution. Des améliorations ont également été apportées pour ce qui est du lien entre la fondation et le modèle.

Ces divers travaux ont comme objet principal d'étudier le comportement des gabions soumis à un chargement constitué par une force horizontale appliquée à une hauteur variable. Le plus souvent, la force appliquée est simplement caractérisée par son moment par rapport à un axe situé dans le plan de la base de la hauteur libre du gabion. Les essais étudient principalement la relation chargement/déplacement, le chargement de ruine et la figure de rupture.

Notons enfin que ces essais viennent généralement à l'appui d'une formulation théorique différente pour chacun des auteurs avec à chaque fois une très bonne adéquation entre l'expérience et la théorie.

Nous allons centrer notre étude sur les résultats les plus récents (hors photoélasticité qui est peu adaptée à une comparaison avec nos travaux) : ceux d'Albert et al. (1972) et ceux de Maitland et Schroeder (1979).

### **7.2.2 Comparaison avec les travaux d'Albert et al.**

#### **7.2.2.1 Modèle bidimensionnel (double rideau)**

Dans ces expériences, la gabionnade est modélisée par un double rideau rigide rempli de remblai frottant sans cohésion (sable). Le chargement extérieur est constitué d'une force horizontale (Figure 7-7).

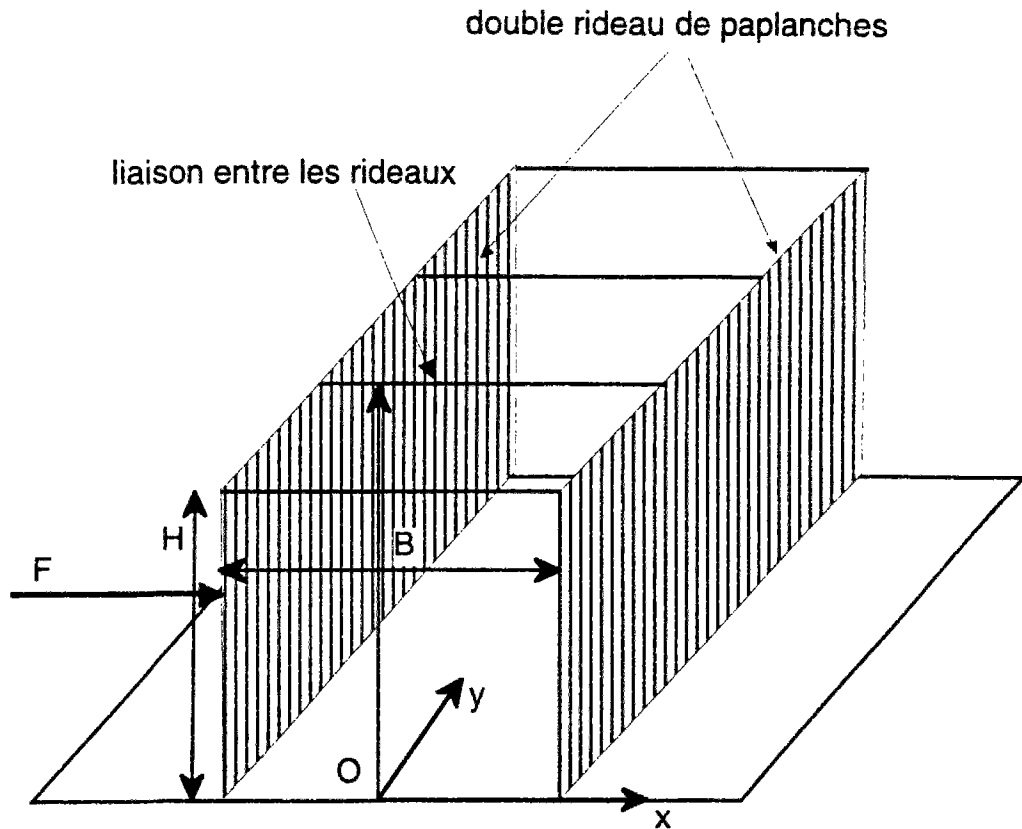


Figure 7-7 Double rideau de palplanches

La seule cinématique parmi celles que nous avons étudiées qui peut donner lieu à une comparaison est celle que nous avons présentées dans le cadre de la cellule de gabion isolée soumise à un moment (§4.6).

Cette cinématique peut être très facilement adaptée au cas du double rideau, en supposant les parois lisses. On aboutit alors à la condition nécessaire de stabilité suivante en notant  $W$  le poids linéique du double rideau :

$$M^+ \leq WH \frac{\tan \phi}{2} \quad (7-12)$$

Cette inégalité peut aussi se mettre sous la forme adimensionnelle suivante :

$$6 \frac{M^+}{\gamma H^3 L} \leq 3 \tan \phi \frac{B}{H} \quad (7-13)$$

Le majorant obtenu est reporté dans la figure ci-après synthétisant les travaux d'Albert et al. sous le nom de « majorant cinématique ».

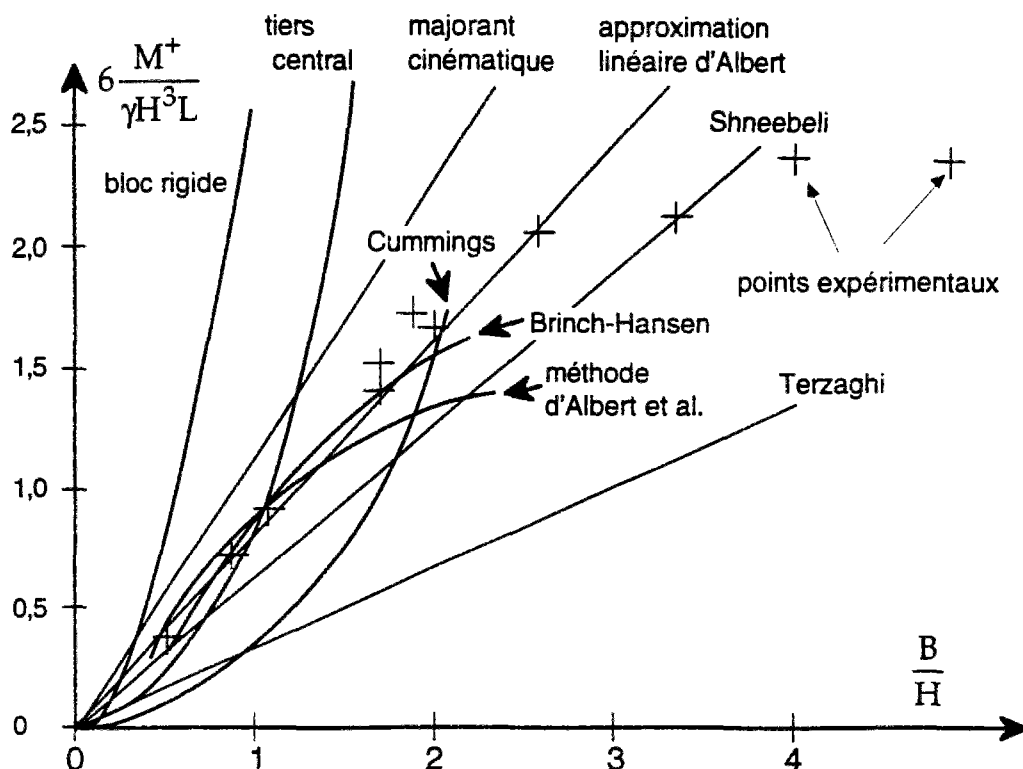


Figure 7-8 Comparaisons d'essais et de résultats théoriques d'après Albert et al. (1972)

On note que les expériences ont exploré un champ de variation de  $B/H$  particulièrement large.

Le majorant cinématique que nous proposons est effectivement un majorant pour l'ensemble des points expérimentaux. Ce majorant est environ à 22% des points expérimentaux les plus proches. La majoration devient mauvaise pour les rapports  $B/H$  grands, pour lesquels il faut sans doute envisager des mécanismes plus « concentrés » vers les deux parois au lieu d'un mécanisme homogène.

Les résultats de Brinch-Hansen coïncident de manière assez proche avec les points expérimentaux. On peut néanmoins s'étonner de voir un certain nombre de points expérimentaux au-dessus de cette courbe de Brinch-Hansen qui correspond à un majorant cinématique. Une explication possible est que le montage expérimental qui comporte une fixation par rotule de la paroi aval n'est pas compatible cinématiquement avec la cinématique de Brinch-Hansen. Celle-ci prévoit un centre de rotation pour un bloc comprenant une partie du remblai et l'ensemble des parois, ce centre de rotation étant situé au-dessous du plan de base du gabion.

Notons que c'est une des conclusions des auteurs que le frottement entre les parois et le remblai a peu d'importance. Ceci vient de la comparaison des résultats entre deux expériences ; l'une avec des rouleaux collés aux parois, l'autre avec les parois polies. Ceci semble justifier expérimentalement notre choix de ne pas tenir compte ce frottement. Mais d'autres auteurs avaient conclu différemment (Schneebeli

et Cavaillé-Coll, 1957) en comparant cette fois ci les résultats obtenus avec un remblai constitué de sable et un remblai constitué de rouleaux.

### 7.2.2.2 Modèle tridimensionnel

Pour la cellule isolée, deux types de chargement ont été considérés :

- type duc d'Albe : chargement horizontal en tête
- type batardeau : répartition de pression hydrostatique.

Les expériences ont été faites avec deux matériaux de remblai (graines d'alpiste ou sable) et plusieurs valeurs de  $d/H$  (rapport du diamètre de la cellule à la hauteur) :

$$\varphi = 21^\circ, \gamma = 7,65 \text{ kN.m}^{-3} \text{ (graines)} \text{ ou } \varphi = 33^\circ, \gamma = 16 \text{ kN.m}^{-3} \text{ (sable)},$$

$$H = 0,75 \text{ m}, d/H = 0,4 \text{ ou } 0,7 \text{ ou } 0,9$$

L'étude ne fournit aucune donnée sur la tension maximale  $N_0$  dans les « serrures » des profilés en plastique simulant des palplanches à module. Notons que la rigidité à la flexion de ces profilés n'est pas gênante, compte tenu de notre cinématique qui ne fait pas intervenir la flexion des palplanches.

Les résultats des essais sont rappelés dans le tableau ci-après :

	$d/H=0,4$	$d/H=0,7$	$d/H=0,9$
sable sur fondation sableuse $\varphi=33^\circ$	0,09	0,39	0,79
sable sur fondation rigide $\varphi=33^\circ$	0,10	0,47	0,90
graines d'alpiste sur fondation rigide $\varphi=21^\circ$	0,10	0,40	0,71

Tableau 7-5 Valeurs de  $6M/\gamma H^4$  mesurées

Nous allons utiliser les résultats que nous avons établis lors de l'étude cinématique d'une cellule isolée soumise à un moment de renversement. Nous rappelons ci-dessous la condition nécessaire de stabilité (4-122) en faisant intervenir la quantité adimensionnelle  $6M/\gamma H^4$ :

$$\frac{6M}{\gamma H^4} \leq \frac{3\pi}{4} \left( \frac{d}{H} \right)^2 \tan \varphi + 12 \frac{dN_0}{\gamma H^3} \quad (7-14)$$

L'évaluation du premier terme du majorant obtenu précédemment ne pose pas de problème :

	d/H=0,4	d/H=0,7	d/H=0,9
sable $\varphi=33^\circ$	0,24	0,75	1,24
graines d'alpiste $\varphi=21^\circ$	0,145	0,44	0,73

Tableau 7-6 Valeurs de  $\frac{3\pi}{4} \left( \frac{d}{H} \right)^2 \tan \varphi$

La pris en compte du second terme du majorant qui est dû à la résistance de la coque pose un problème compte tenu de l'absence des données correspondantes. On retient comme coefficient de frottement dans les serrures  $f=0,3$ . Il nous manque encore la valeur de  $N_0$ . Nous allons faire l'hypothèse que l'enceinte de palplanches est dimensionnée selon la méthode recommandée par Terzaghi (coefficient de poussée des terres égal à 0,4 sur la paroi aval, tension maximale au 1/4 de la hauteur libre, choix d'un coefficient de sécurité  $f_s$  compris entre 1,5 et 2) :

$$\begin{aligned}
 12 \frac{dfN_0}{\gamma H^3} &= 12 \frac{dHf}{\gamma H^4} (f_s K \gamma R \left( \frac{3}{4} H \right)) = \\
 &= 18 f f_s K \frac{R^2}{H^2} = \frac{9}{2} f f_s K \left( \frac{d}{H} \right)^2 \approx 1,1 \left( \frac{d}{H} \right)^2 \quad (\text{pour } f_s = 2)
 \end{aligned}
 \tag{7-15}$$

Sous ces hypothèses, nous pouvons déterminer le majorant de  $6M^+/\gamma H^4$  :

	d/H=0,4	d/H=0,7	d/H=0,9
sable $\varphi=33^\circ$	0,42	1,29	2,13

Tableau 7-7 Majorant évalué à partir de la cinématique

La comparaison de notre cinématique et des résultats d'expérience, permet de vérifier que notre cinématique donne bien un majorant du moment maximal supportable mais ce majorant n'est pas très satisfaisant, car il est éloigné des valeurs expérimentales. Une explication est le soulèvement de la cellule de gabion qui intervient, d'après les données expérimentales, pour un moment appliqué égal au 2/3 du moment maximal. Alors que dans la cinématique que nous envisageons, les palplanches peuvent être considérées comme étant fixées au substratum par une rotule. De plus, la perte de remblai lors du soulèvement diminue la résistance de la cellule. Nous verrons que l'examen des essais rapportés par Maitland et Schroeder donne un argument supplémentaire dans ce sens.

### 7.2.3 Comparaison avec les essais de Maitland et Schroeder

Maitland et Schroeder citent de nombreux essais antérieurs mais paraissent ignorer les travaux d'Albert et al. que nous venons d'examiner. Ils ont réalisé des expériences sur divers types de cellules cylindriques de tailles différentes. Nous allons nous limiter aux grandes cellules pour lesquelles l'article de 1979 donne des résultats détaillés.

cellule d'essai	hauteur libre	profondeur de fiche
n°1	127 cm	55,9 cm
n°2	127 cm	25,4 cm
n°3	121,9 cm côté aval 111,8 cm côté amont	61,0 cm côté aval
n°4	121,9 cm	0 cm

Tableau 7-8 Caractéristiques géométriques des cellules d'essai

Les caractéristiques communes aux différentes cellules sont données ci-après :

$$\varphi = 50^\circ, \gamma = 18,1 \text{ kN.m}^{-3}, R = 0,622 \text{ m}, N_0 = 15 \text{ kN/m} \quad (7-16)$$

Nous soulignons qu'à notre connaissance, c'est la seule série d'essais où est précisée la valeur de la tension maximale dans les serrures.

Nous sommes en mesure de comparer les résultats de l'expérience et le majorant donné par notre cinématique :

cellule d'essai	résistance mesurée (kN.m)	majorant cinématique (kN.m)
n° 1	25,84	35,36
n° 2	14,14	35,36
n° 3	26,93	33,13
n° 4	8,84	33,13

Tableau 7-9 Comparaison entre les résultats expérimentaux et le majorant cinématique

On voit que l'écart entre le majorant cinématique est encore très important pour les cellules 2 et 4, alors qu'il est beaucoup plus réduit pour les cellules 1 et 3. Ceci semble résulter de la longueur de la fiche des cellules. L'écart le plus important est obtenu pour la cellule 4 pour laquelle il n'y a pas de fiche. Ensuite vient la cellule 2 qui a une fiche de 25 cm puis les cellules 1 et 3 qui ont une fiche respectivement de 56 et 61 cm.

L'examen des palplanches après la rupture confirme cette différence de comportement entre les cellules 1 et 4 d'une part et 1 et 3 d'autre part. Pour les

cellules 1 et 4, on observe une rotule plastique située au-dessous de la ligne de dragage à une profondeur relativement faible, le reste de la palplanche semblant peu déformée. Pour les cellules 2 et 3, il n'y a pas eu de rotule plastique et les palplanches apparaissent peu déformées.

En conclusion, la cinématique très simple que nous avons construite ne donne des résultats satisfaisants que si la profondeur de fiche est suffisante pour bloquer le déplacement horizontal de l'extrémité inférieure de la palplanche. Ceci explique ainsi l'écart avec les résultats expérimentaux du modèle tridimensionnel d'Albert (absence de fiche) et l'accord assez satisfaisant avec le modèle bidimensionnel d'Albert où le déplacement du rideau avant était bloqué par une articulation.

### 7.2.4 Autres types d'essais concernant les gabions

Nous pensons intéressant de signaler d'autres types d'essais spécifiques aux gabions : des essais portant sur le comportement des serrures des palplanches plates et la résistance des palplanches de raccord.

Ainsi Dismuke (1970) rapporte-t-il des études en photoélasticité de serrures de palplanches plates ainsi que des essais en traction de palplanches de raccord rivetées pour des connexions en T et en Y pour des gabions circulaires ainsi que des connexions à 120° pour des gabions cloisonnés. Plus récemment, il faut citer et al. (1982) ; ces auteurs rendent compte d'une importante série d'essais de traction sur des types variés de connexion en T.

### 7.2.5 Conclusions

Les résultats expérimentaux disponibles, centrés sur l'effet d'un moment extérieur de renversement, n'ont permis qu'une comparaison très partielle avec nos résultats. Nous avons en effet essentiellement étudié le comportement sous poids propre de la gabionnade seule ou en présence d'un remblai extérieur pesant.

Dans le cas où le paramètre de chargement est le poids propre de la gabionnade et éventuellement celui du remblai arrière, d'autres procédures expérimentales seraient à envisager. Nous pensons en particulier à l'emploi de la centrifugeuse.

## 7.3 Comparaison avec les méthodes de dimensionnement classiques

### 7.3.1 Comparaison pour la stabilité sous moment de renversement

Le cas de la résistance sous moment de renversement a été abordé en fait dans la comparaison avec les résultats des expériences d'Albert et al. (1972) (Figure 7-8). Notre majorant cinématique pour le double rideau correspond à un dimensionnement moins conservatif que les autres méthodes de dimensionnement avant application des coefficients de sécurité sauf pour la méthode de renversement du monolithe et sauf pour la méthode du tiers central pour une certaine plage de variation du paramètre d'élancement.

L'évaluation du moment de renversement maximal fourni par les autres méthodes est toujours en dessous de notre majorant cinématique. Notre majorant cinématique s'avère plus proche des résultats expérimentaux que certaines autres estimations comme celle de Cummings ou comme celle de Terzaghi au moins pour les plages réalistes du paramètre B/H.

Les essais de Maitland et Schroeder (1979), cette fois sur des cellules cylindriques confirment également que l'estimation du moment de renversement par Terzaghi est très pessimiste. Notre majorant cinématique est plus proche de l'expérience que l'estimation de Terzaghi pour les cellules possédant une fiche suffisante. Maitland et Shroeder estiment qu'il faut changer 0,4 par 1 comme coefficient de poussée des terres dans l'estimation de Terzaghi.

### 7.3.2 Comparaison pour le dimensionnement de la résistance des serrures

Nous centrerons cette comparaison sur le dimensionnement de la résistance à la traction des serrures des palplanches dans le cas de la cellule isolée sous poids propre posé sur un substratum rocheux. La cellule isolée est une phase constructive de la construction d'une gabionnade sauf si on utilise le terrain en place comme remblai .

	$\phi=20^\circ$	$\phi=30^\circ$	$\phi=40^\circ$
Terzaghi (1945)	0,40	0,40	0,40
Design Manual 1986	0,30	0,30	0,30
EAU 1990	0,66	0,50	0,36

Tableau 7-10 Valeur de  $\frac{N_{\max}}{\gamma RH}$  pour diverses méthodes de dimensionnement



Le calcul à la rupture ne donne pas d'évaluation de la tension maximale dans les serrures. Mais ce qui se prête à la comparaison est le dimensionnement qu'on peut tirer de l'approche statique que l'on va qualifier par  $\frac{N_0}{\gamma_s R H}$  avec  $\gamma_s$  le minorant du chargement extrémal  $\gamma^*$  déterminé par la statique. Les valeurs numériques figurant dans le tableau ci-dessous sont basées sur les hypothèses complémentaires suivantes :  $R=10m$ ,  $H=20m$ ,  $k = R M_0 / H^2 N_0 \approx 0,006$ .

	$\varphi=20^\circ$	$\varphi=30^\circ$	$\varphi=40^\circ$
sans résistance à la flexion	0,49	0,33	0,22
avec résistance à la flexion, bord libre	0,44	0,30	0,20
avec résistance à la flexion, bord appuyé	0,39	0,27	0,18

Tableau 7-11 Valeur de  $\frac{N_0}{\gamma_s R H}$  pour diverses hypothèses

Si on prend en compte la résistance à la flexion avec la condition à la base qui semble la plus représentative (bord simplement appuyé), on conclut, pour les valeurs des paramètres géométriques utilisées ici, que les estimations faites par les méthodes classiques sont plus pessimistes sauf pour des remblais de qualité particulièrement mauvaise ( $\varphi < 30^\circ$ ).

On conclut de la comparaison des deux tableaux précédents que les estimations des méthodes usuelles sont plutôt conservatives **au moins pour la phase de construction où les cellules sont isolées**. Cette conclusion est renforcée par la considération suivante : nous avons considéré dans cette comparaison uniquement les résultats de l'étude statique. Or, les résultats de l'étude cinématique sont relativement éloignés de ceux de l'étude statique, surtout si l'on prend en compte dans la cinématique le frottement à l'interface remblai/substratum (qui n'est pas intervenu dans notre construction statique).

Les résultats donnés par l'approche statique sont malgré tout proches de ce que spécifie la méthode du Design Manual (1986). Dans un premier temps, il serait possible d'utiliser ces résultats à titre complémentaire pour évaluer l'influence des paramètres de résistance du sol, de géométrie de cellules et des caractéristiques des palplanches et moduler, suivant ces paramètres, les règles de dimensionnement déjà validées par l'expérience.

## 7.4 Récapitulatif

Le tableau ci-dessous résume les conclusions des diverses comparaisons que nous avons pu effectuées dans ce chapitre entre les résultats obtenus par le calcul et des données de divers types stabilité ou instabilité d'ouvrages réels, résultats d'essais sur modèles réduits, règles de dimensionnement intégrant l'expérience de la construction de nombreux ouvrages.

Provenance des données de comparaison	Provenance des résultats du calcul à la rupture	Conclusion
exemple de gabionnade stable : cas de Long Beach	cinématiques de la cellule de gabion isolée (§4.3 et 4.4) cinématique de la gabionnade (§5.3)	résultats compatibles
accident de Umm Said	cinématique du §7.1.3	résultats compatibles
essais d'Albert et al sur modèle bidimensionnel	adaptation de la cinématique du §4.6 au modèle bidimensionnel	bon accord avec l'expérience pour les élançements moyens et grands
essais d'Albert et al sur modèle tridimensionnel	cinématique du §4.6	la cinématique donne un majorant mais peu satisfaisant
essais de Maitland et Schroeder sur modèles tridimensionnels	cinématique du §4.6	majorant assez satisfaisant pour les cellules ayant une fiche suffisante
méthodes usuelles de dimensionnement : vérification de la résistance à l'effort normal $N_{\theta\theta}$	statique de la cellule isolée (chapitre 3)	les méthodes classiques apparaissent souvent pessimistes au moins pour la phase transitoire du gabion isolé

Tableau 7-12 Synthèses des comparaisons entre les résultats issus du calcul à la rupture et d'autres données

La comparaison reste partielle : notamment le chargement limite sous poids propre que nous avons le plus étudié n'a pas fait l'objet de détermination expérimentale, ni pour la cellule isolée ni pour la gabionnade ni pour l'ensemble gabionnade et remblai extérieur.



## **8. Conclusions**

### **8.1 Apports de la modélisation utilisée**

#### **8.1.1 Simplification apportée par l'utilisation d'une modélisation mixte**

L'utilisation d'une modélisation mixte a permis de considérer l'enceinte de palplanches comme une coque au lieu de prendre en compte chaque palplanche individuellement comme c'était le cas dans certains travaux antérieurs utilisant le calcul à la rupture. Ceci a permis une réelle simplification dans les calculs statique et cinématique, notamment par rapport à (Dormieux et Delaurens, 1991).

#### **8.1.2 Prise en compte de la résistance à la flexion**

La modélisation coque utilisée pour l'enceinte de palplanches a surtout permis d'envisager des champs statiques et cinématiques plus complexes qu'auparavant, faisant jouer notamment la résistance à la flexion des palplanches ou bien la résistance au frottement des serrures de palplanches (composante  $N_{\theta z}$  de l'effort normal).

#### **8.1.3 Mode de prise en compte de la présence d'un remblai extérieur**

Les méthodes de dimensionnement classiques prennent en compte la présence d'un remblai par la donnée de forces de poussée. En calcul à la rupture, on est amené à considérer comme système, l'ensemble de la gabionnade et du remblai. L'étude de cinématiques avec flexion des palplanches a rendu possible la prise en compte du poids propre du remblai externe comme une force motrice extérieure contribuant à déstabiliser la gabionnade.

#### **8.1.4 Prise en compte de l'eau**

De la même manière que (Buhan et al., 1992), la modélisation du matériau de remblai comme un milieu poreux saturé a permis la prise en compte des effets hydrostatiques dus à la présence de l'eau. L'étude du phénomène à l'interface remblai/palplanches a permis de préciser les conditions de validité de cette approche en contraintes effectives.

### 8.1.5 Construction des champs cinématiques

Nous avons utilisé divers procédés pour construire des champs cinématiques. Il faut citer la construction de champs axisymétriques à partir de champs par blocs qui ont permis d'améliorer sensiblement certains résultats antérieurs, ainsi que l'obtention d'un champ axisymétrique à partir de la solution d'une équation aux dérivées partielles. L'annexe C montre également un exemple de construction mettant en jeu un produit de convolution.

## 8.2 Principaux résultats

### 8.2.1 Améliorations par rapport aux travaux antérieurs utilisant le calcul à la rupture

Nous avons étudié successivement la stabilité sous poids propre de la stabilité de la cellule de gabion isolée et de la gabionnade par les méthodes statique et cinématique.

L'amélioration est particulièrement nette dans le cas de la cinématique de la cellule isolée grâce à l'utilisation de champs de vitesse axisymétriques avec flexion des palplanches dans les deux cas envisagés pour l'interface remblai/substratum : interface lisse ou avec frottement. Nous avons également obtenu une amélioration sensible dans l'approche statique en prenant en compte la résistance à la flexion des palplanches ainsi que la condition à la limite au bord inférieur de ces palplanches.

Dans le cas de la gabionnade, nous avons étendu l'application de la méthode statique, qui avait été jusque là limitée à la cellule isolée. Nous avons également étendu l'emploi de la méthode cinématique au cas de l'interface remblai/substratum lisse, au cas du remblai interne partiellement liquéfié et au cas de la présence d'un remblai extérieur. Dans le cas de l'interface remblai/substratum frottante sous poids propre sans remblai extérieur qui avait déjà été étudié (Buhan et al., 1992), la cinématique que nous avons envisagée a permis d'améliorer les résultats antérieurs pour certaines valeurs du couple de paramètres (élancement de la cellule, angle de frottement interne).

### 8.2.2 Amélioration du dimensionnement de la cellule isolée sous poids propre

La prise en compte de la résistance à la flexion des palplanches nous a permis dans le cadre de l'étude statique de la cellule de gabion isolée de quantifier l'augmentation du chargement maximal supportable due à la résistance à la flexion.

Comme on retrouve des valeurs analogues à certaines méthodes de dimensionnement classique, il est envisageable d'utiliser ces résultats pour évaluer plus précisément le degré de sûreté d'une cellule de gabion vis-à-vis de la ruine par éclatement. Il serait ainsi possible de moduler les estimations classiques par la prise

en compte des données de résistance du sol, de la géométrie de la cellule, des caractéristiques de résistance à la flexion des palplanches.

Il faut noter toutefois que ces résultats ont été obtenus en supposant que la coque était soumise à une pression proportionnelle à la profondeur, suite au choix d'un champ de Rankine dans le remblai soumis à son poids propre. Ils peuvent être adaptés pour d'autres cas de chargement, comme celui d'une surcharge uniforme en haut du remblai en plus du poids propre.

### 8.2.3 Prise en compte de la géométrie de la gabionnade

L'étude pour la même cinématique de plusieurs géométries en plan de gabionnade permet d'effectuer une comparaison de leur stabilité. Dans notre étude, nous avons utilisé quand c'était possible une gabionnade de référence, celle constituée de cellules juxtaposées ayant comme rayon, le rayon de la cellule principale. On a pu notamment confirmer le mauvais comportement d'une géométrie particulièrement économe en palplanches, mauvais comportement qui était déjà signalé par divers auteurs. Ces cinématiques (sauf celles de 6.2 et de 7.1.3) aboutissent à une condition nécessaire de stabilité qui se met sous la forme suivante :

$$\frac{K_a \gamma R H}{N_0} \leq F(\varphi, \eta, \dots)$$

L'étude statique en configuration déformée, permet pour les cas usuels, de donner une base claire à la formule de Swatek en fournissant une interprétation en calcul à la rupture du travail de Rossow (1984). Il est possible d'appliquer sur cette configuration déformée, les résultats relatifs à la prise en compte de la résistance à la flexion des palplanches obtenus pour la cellule isolée. La simplicité des résultats obtenus par cette étude statique en configuration déformée jointe à la prise en compte de la résistance à la flexion, peut présenter un intérêt pour le dimensionnement des gabionnades malgré l'incertitude liée à ce changement de configuration qui reste une construction intellectuelle.

### 8.2.4 Prise en compte de la présence d'un remblai extérieur

Le calcul à la rupture permet une prise en compte globale de l'ensemble gabionnade et remblai extérieur. A la différence des méthodes classiques, on observe une différence de comportement selon les valeurs du couple de paramètres (élancement, angle de frottement interne). Pour certaines valeurs, la présence du remblai a une nette influence déstabilisatrice, pour d'autres, non.

### 8.2.5 Effet de la présence de la cellule de raccord

La présence de cellules de raccord est reconnue comme une source potentielle de désordres. En effet, après remplissage de la cellule de raccord, l'arc de raccord exerce une traction sur la paroi de la cellule principale. Ceci doit être mis en rapport

avec le fait que la localisation la plus fréquente des ruptures semble être la palplanche de raccord ou son voisinage immédiat. Il peut donc y avoir des effets très locaux de la conception géométrique de la gabionnade.

La comparaison de l'approche statique en configuration initiale et en configuration déformée confirme l'existence de ce risque, puisqu'en configuration déformée, on retrouve des conditions de dimensionnement en accord avec les pratiques usuelles, ce à quoi nous ne sommes pas parvenu dans le cas de la configuration initiale (d'une gabionnade cellulaire). Ceci ne constitue toutefois qu'un argument heuristique, puisque nous n'avons exploré qu'une classe particulière de solutions statiques.

Dans le cas d'une liquéfaction partielle du remblai dans une zone limitée de la cellule de raccord autour de la palplanche de raccord, il a été possible de confirmer ce risque par une étude cinématique.

Ce risque peut être supprimé par l'adoption, quand c'est possible, d'une configuration de gabionnade constituée de cellules juxtaposées. Ceci a déjà été proposé par Ghali (1981) et a été réalisé au moins une fois depuis (au port de Cherbourg).

### 8.3 Perspectives

#### 8.3.1 Extension au cas de gabionnades fichées dans le sol

Les cinématiques que nous avons construites dans le cas de gabions avec le bord inférieur encastré sont directement utilisables dans les cas d'une gabionnade fichée dans le sol.

Mais on peut sans doute améliorer le résultat en utilisant des cinématiques s'étendant jusqu'à la profondeur  $H'$  sous le niveau de dragage (Figure 8-1). Ceci correspond aux observations faites sur des modèles réduits à grande échelle soumis à un moment de renversement. On peut alors utiliser la cinématique  $C_g$  d'une cellule de gabions fondée sur le rocher de mêmes caractéristiques à l'exception de la hauteur  $H''$  qui sera prise égale à  $H+H'$ . Il restera à compléter par une cinématique  $C_f$  pour le sol de fondation.

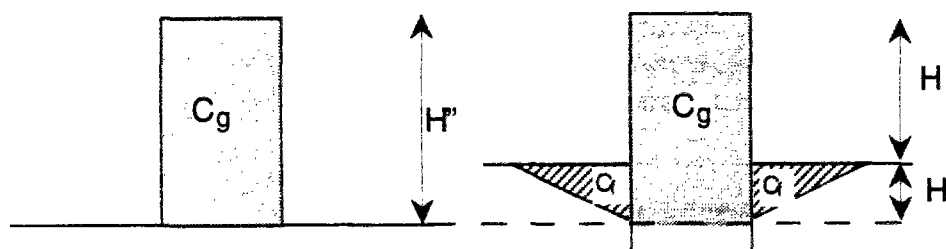


Figure 8-1 Cinématique pour une cellule sur substratum rigide et cinématique pour une cellule fichée dans le sol

### **8.3.2 Construction d'autres cinématiques**

Toutes les cinématiques que nous avons construites ( sauf une obtenue comme solution d'une équation aux dérivées partielles) sont issues par des transformations diverses d'une cinématique par blocs très simple : les deux blocs sont séparés par un plan, l'un des blocs est immobile et l'autre est en translation.

On peut construire de nouvelles cinématiques en utilisant les mêmes méthodes de construction mais en utilisant comme base une cinématique par blocs avec un bloc immobile et un bloc en rotation séparés par une surface cylindrique s'appuyant sur une spirale logarithmique. Un cas particulier sera le mécanisme utilisé par Ovesen (1962). On retrouvera les cinématiques que nous avons étudiées comme un cas limite où le centre de rotation est rejeté à l'infini dans une direction donnée. Il faut s'attendre toutefois à une lourdeur accrue des calculs.

### **8.3.3 Utilisation de méthodes numériques**

Les méthodes statiques et cinématiques du calcul à la rupture peuvent faire l'objet de calculs numériques utilisant les éléments finis.

Il sera particulièrement commode d'appliquer ces méthodes statique et cinématique au cas axisymétrique de la cellule sous poids propre. On se référera principalement aux travaux de Pastor (1983) et de Turgeman (1983) utilisant les méthodes de la programmation linéaire et à des développements récents permettant d'aboutir à un problème d'optimisation sans contrainte (Turgeman et Guessab, 1995).

L'étude statique de la tranche horizontale de gabionnade en déformation plane menée numériquement en élasticité non linéaire par Kuppusamy et al. (1985) pourrait également être abordée en calcul à la rupture par exemple en utilisant l'adaptation des méthodes fondées sur la programmation linéaire à la modélisation mixte (Averbuch, 1996).

On peut attendre de telles méthodes une réduction de la largeur des encadrements obtenus par des méthodes analytiques.

### **8.3.4 Prise en compte des grandes déformations dans le calcul à la rupture**

La prise en compte de grandes déformations est de nature à changer la conclusion de l'étude de stabilité de certains ouvrages. Les gabionnades cellulaires posent ce problème. On a vu que la liquéfaction d'une zone limitée du remblai dans la cellule de raccord pouvait donner lieu à une instabilité. Alors que le calcul de la stabilité en configuration déformée aurait conduit à la stabilité, même avec une liquéfaction totale du remblai.



## *Chapitre 8*

Le mécanisme utilisé pour mettre en évidence cette instabilité était très « concentré » près du raccord. Plus précisément, les angles de rotation étaient grands pour des déplacements petits. On peut alors se poser la question de l'évolution de la stabilité au cours du mouvement envisagé.

Un lien serait à établir avec des travaux récents en plasticité des plaques et des coques en grandes déformations. On peut citer en particulier les travaux de Gao (1995, 1996).

## A.

### Application à un talus renforcé par une répartition surfacique de tirants

#### A.1. Introduction

##### A.1.1. Configuration envisagée

On s'intéresse à un talus vertical renforcé par une paroi constituée par exemple de palplanches (Figure A-1) pouvant supporter un moment  $M_0$  (d'axe  $Oy$ ) par unité de longueur de paroi.

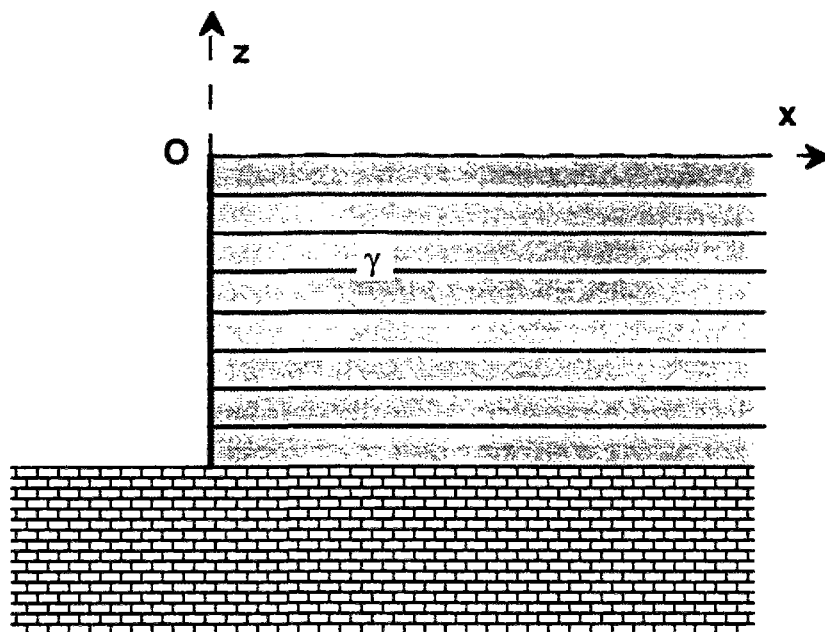


Figure A-1 Talus renforcé par une paroi avec répartition surfacique de tirants

On suppose que cette paroi est renforcée par une répartition de tirants dont on suppose que l'on peut modéliser l'effet par une densité surfacique  $F(z)$  de forces horizontales sur la paroi, sans interaction avec le sol environnant. Nous n'étudierons pas en détail l'effet d'une fiche éventuelle ; nous nous limiterons à modéliser son effet par la donnée de la condition à la limite à la base de la paroi : base libre, base libre en rotation et bloquée en translation, base encastree. Le substratum en dessous de l'extrémité inférieure de la paroi est supposé rigide. On suppose que l'interface entre le sol et la paroi est lisse.

On envisage deux cas pour le critère de résistance du sol :

- critère de Coulomb sans cohésion

- critère de Tresca avec cohésion proportionnelle à la profondeur

On se propose, pour ces différents critères pour le sol de remblai, de construire des cinématiques et des statiques, à partir de solutions obtenues pour une coque soumise à une pression hydrostatique.

### A.1.2. Analogie avec les gabions

On suppose donc que le talus est renforcé par une paroi ayant un critère de résistance ne portant que sur le moment fléchissant défini comme ci-dessous :

$$|M| \leq M_0 \quad (A-1)$$

La répartition de tirants est supposée pouvoir exercer sur la paroi une densité de force  $F^1$  telle que :

$$|F| \leq F_0(z) \quad (A-2)$$

L'équation différentielle régissant le comportement de la paroi est la suivante :

$$\frac{d^2M}{dz^2}(z) + F(z) - p(z) = 0 \quad (A-3)$$

On peut dualiser cette équation d'équilibre directement ou remarquer qu'il s'agit formellement du même problème que pour l'équilibre d'une cellule de gabions la variable  $F$  étant alors à remplacer par l'effort membranaire divisé par le rayon  $N/R$ . On peut alors aboutir à une condition nécessaire de stabilité.

Ecrivons pour cela la fonction  $\Pi$  (densité surfacique de puissance résistante maximale), dans le cas d'une déformée continûment dérivable caractérisée par la vitesse  $w(z)$  de déplacement horizontal de la paroi :

$$\Pi = M_0|w''| + RF_0(z)|w| \quad (A-4)$$

S'il y a une discontinuité de  $w'$  (vitesse de rotation concentrée  $\alpha = \llbracket w' \rrbracket$ ), on a la contribution suivante à la puissance résistante maximale :

$$\Pi = M_0|\alpha| \quad (A-5)$$

---

<sup>1</sup> Dans le cas de tirants, il serait plus réaliste de poser  $0 \leq F \leq F_0$ , le tirant ne résistant qu'en traction. Le choix fait en (A-2) a l'avantage de permettre d'utiliser sans adaptation certains des résultats établis pour les gabions. D'autre part, ce choix n'est mis en défaut que si l'on utilise des statiques telles que  $F \leq 0$  ou des cinématiques telles que la composante  $U_x$  de la vitesse de la paroi soit positive. En dehors de ces cas, les résultats statiques et cinématiques sont les mêmes que l'on utilise  $|F| \leq F_0$  ou  $0 \leq F \leq F_0$ .

Comme pour l'étude du gabion, nous distinguerons trois cas de conditions aux limites à la base :

- bord inférieur libre
- bord inférieur simplement appuyé
- bord inférieur encastré.

On s'intéresse aux solutions pour le cas où le remblai est un fluide ; alors le problème est formellement identique au cas d'une cellule de gabion soumise à une pression hydrostatique : il suffit d'identifier  $F_0$  à  $N_0/R$  avec  $N_0$  la résistance linéique à l'arrachement des serrures de palplanches et  $R$  le rayon de la cellule de gabion.

Dans le cas où la densité surfacique est constante, on connaît la solution statique exacte et la cinématique associée (qu'il suffit de définir pour la paroi) grâce à l'étude sur les gabions.

La question que nous souhaitons maintenant aborder est la prise en compte des propriétés de résistance du sol soutenu par la paroi.

## **A.2. Étude statique dans le cas où $F_0(z)=\text{Constante}$**

On peut obtenir facilement une borne statique pour le problème avec remblai à partir de la solution statique du problème avec un fluide, pour les cas de remblai que nous avons énumérés précédemment.

Le résultat de l'étude du problème avec le fluide est le poids volumique du fluide extrémal supportable  $\gamma_h^+$  qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\gamma_h^+ H}{F_0} = f^+ \left( \frac{M_0}{F_0 H^2} \right) \quad (\text{A-6})$$

La fonction  $f^+$  dépend de la condition à la limite sur le bord inférieur ; elle a été déterminée lors de l'étude sur les gabions (chapitre 3).

### **A.2.1. Cas du matériau de Mohr-Coulomb**

On considère le champ de contraintes suivant dans le remblai :

$$\sigma_{zz} = \gamma z; \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = K_a \gamma z \text{ avec } K_a = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (\text{A-7})$$

On peut dans ce cas conclure :

$$\gamma^+ \geq K_p \gamma_h^+ \text{ avec } K_p = \frac{1}{K_a} = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (\text{A-8})$$

### A.2.2. Cas du matériau de Tresca avec cohésion proportionnelle à la profondeur

On pose que la cohésion  $C$  peut s'écrire, comme pour une argile normalement consolidée, en fonction d'un gradient de cohésion  $c$  :

$$C = -cz \quad (A-9)$$

On considère le champ de contraintes suivant dans le remblai :

$$\sigma_{zz} = \gamma z; \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = (\gamma - 2c)z \quad (A-10)$$

On peut dans ce cas conclure :

$$\gamma^+ \geq \gamma_h^+ + 2c \quad (A-11)$$

## A.3. Étude cinématique dans le cas du critère de Coulomb

On suppose que l'on connaît la cinématique  $w(z)$  associée à la solution statique pour le problème avec un fluide. Alors nous allons montrer que si cette fonction  $w(z)$  est croissante avec  $w(-H)=0$ , l'inégalité donnée par la relation (8) est en fait une égalité.

Nous procéderons en deux temps. Premièrement, nous allons montrer que s'il existe un champ cinématique dans le remblai satisfaisant certaines conditions alors la borne statique (A-8) donne la solution exacte du problème. Deuxièmement, nous montrerons que la condition  $w(z)$  croissante est une condition suffisante d'existence du champ cinématique dans le remblai satisfaisant les conditions demandées au premierement.

### A.3.1. Obtention de la solution exacte sous réserve de l'existence d'un champ cinématique dans le remblai vérifiant certaines conditions

Supposons qu'il existe un champ de vitesse en déformation plane défini par :

$$\underline{U} = U(x, z)\underline{e}_x + V(x, z)\underline{e}_z \quad (A-12)$$

On suppose que ce champ vérifie les conditions cinématiques suivantes :

$$U(0, z) = -w(z); V(x, -H) = 0 \quad (A-13)$$

et vérifie de plus la condition suivante (saturation du critère de pertinence) :

$$\text{tr}(\underline{d}) = \sin \varphi (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \quad (\text{A-14})$$

Dans notre cas, cette relation (A-14) se récrit :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} = \sin \varphi \left( \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (\text{A-15})$$

sous réserve des hypothèses complémentaires suivantes :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \geq 0; \frac{\partial V}{\partial z} \leq 0 \quad (\text{A-16})$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{A-17})$$

L'hypothèse (A-17) exprime que Ox et Oz sont axes principaux du tenseur des déformations.

Alors, on peut calculer la puissance des efforts extérieurs :

$$P_e = - \int_{z=-H}^0 \int_{x=0}^{+\infty} \gamma V(x,z) dx dz \quad (\text{A-18})$$

On peut transformer cette expression en utilisant l'égalité suivante :  $V = \frac{\partial z V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial z}$ . On obtient alors en tenant compte des conditions aux limites :

$$P_e = \int_{z=-H}^0 \int_{x=0}^{+\infty} \gamma z \frac{\partial V}{\partial z} dx dz \quad (\text{A-19})$$

On remplace maintenant dans l'intégrale  $\frac{\partial V}{\partial z}$  par  $-K_a \frac{\partial U}{\partial x}$  en utilisant la relation (A-15) ; on obtient ainsi :

$$P_e = K_a \int_{-H}^0 -\gamma z w(z) dz \quad (\text{A-20})$$

La puissance résistante maximale étant nulle dans le sol, la puissance résistante maximale se réduit au seul terme dû à la paroi, s'il n'y a pas de puissance résistante maximale à l'interface sol/substratum. Comme le champ de vitesse  $w(z)$  est associé à la solution statique pour le cas d'un fluide, on a l'expression suivante pour la

puissance résistante maximale, où  $\gamma_h^+$  désigne le chargement extrême pour le problème hydrostatique :

$$P_{rm}(w(z)) = \gamma_h^+ \int_{-H}^0 -zw(z)dz \quad (A-21)$$

En écrivant l'inégalité  $P_e \leq P_{rm}$ , on obtient sous réserve de l'existence d'un champ  $\underline{U}$  vérifiant les conditions (A-13), (A-15), (A-16), (A-17) et en tenant compte de (A-8) :

$$\gamma^+ = K_p \gamma_h^+ \quad (A-22)$$

Ce résultat peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\gamma^+ H}{F_0} = K_p f^+ \left( \frac{M_0}{F_0 H^2} \right) \quad (A-23)$$

### A.3.2. Existence d'un champ cinématique satisfaisant les conditions demandées dans le cas où $w(z)$ est croissante avec $w(-H)=0$

On va montrer que ce champ  $\underline{U}$  existe si  $w(z)$  est croissante avec  $w(-H)=0$ . On pose  $\underline{v}(x, z)$  le champ de vitesse défini par (Figure A-2):

$$\begin{cases} v_x = -1, v_z = -\tan \beta & \text{si } z - x \tan \alpha \leq 0 \\ v_x = v_z = 0 & \text{si } z - x \tan \alpha \geq 0 \end{cases} \quad (A-24)$$

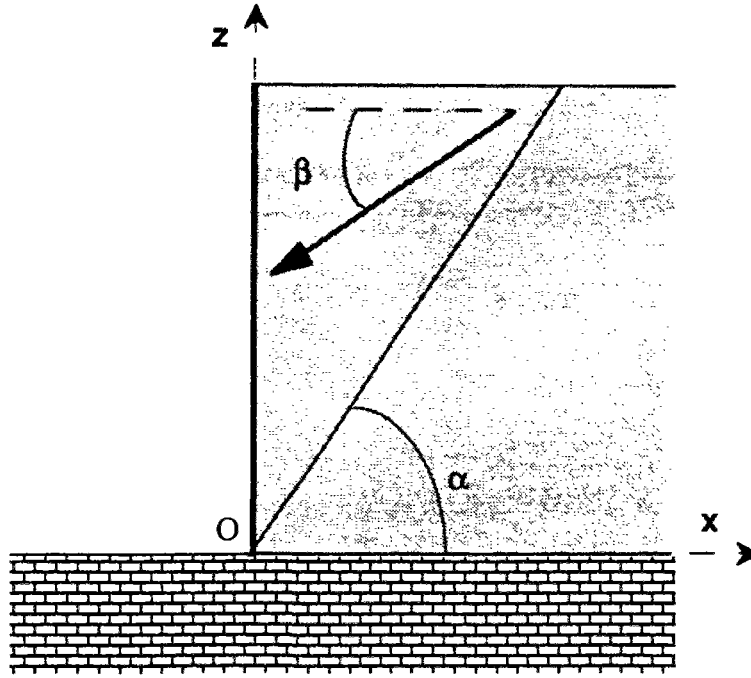


Figure A-2 Champ par blocs

On définit à partir de la donnée de la vitesse horizontale de la paroi  $w(z)$  et du champ par blocs  $v(x, z)$ , le champ cinématique suivant :

$$\underline{U}(x, z) = \int_{-H}^0 \frac{\partial w}{\partial z}(z_0) \underline{v}(x, z - z_0) dz_0 \quad (A-25)$$

On remarque que le champ ainsi défini est une superposition linéaire de champs pertinents déduits les uns des autres par translation, tous les coefficients étant positifs ou nuls.

Il faut vérifier que le champ  $\underline{U}$  que nous venons de définir satisfait l'ensemble des conditions demandées.

Commençons par vérifier les conditions (A-13). La condition  $V(x, -H) = 0$  se déduit de ce que  $\underline{v}(x, z)$  est nul si  $x \geq 0$  et  $z \leq 0$ . La condition  $U(0, z) = -w(z)$  se déduit d'un calcul facile :

$$U(0, z) = \int_{-H}^0 \frac{\partial w}{\partial z}(z_0) v_z(0, z - z_0) dz_0 = \int_{-H}^z -\frac{\partial w}{\partial z}(z_0) dz_0 = -w(z) + w(-H) = -w(z) \quad (A-26)$$

On a également  $U(x, -H) = 0$ , ce qui assure que la puissance résistante maximale de l'interface sol/substratum est nulle sans qu'il soit nécessaire de faire une hypothèse supplémentaire sur cette interface. Pour vérifier les conditions (A-16), (A-17) et (A-18), il faut pouvoir calculer les dérivées du champ  $\underline{U}$ , ceci se fait en dérivant sous le signe somme en prenant en compte la discontinuité de la fonction à dériver.



## Annexe A

On trouve pour  $(z-x\tan\alpha)$  compris entre  $-H$  et  $0$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \sin\alpha \frac{\partial w}{\partial z}(z-x\tan\alpha), & \frac{\partial U}{\partial z} = -\cos\alpha \frac{\partial w}{\partial z}(z-x\tan\alpha), \\ \frac{\partial V}{\partial x} = \sin\alpha \tan\beta \frac{\partial w}{\partial z}(z-x\tan\alpha), & \frac{\partial V}{\partial z} = -\cos\alpha \tan\beta \frac{\partial w}{\partial z}(z-x\tan\alpha). \end{cases} \quad (\text{A-27})$$

Les conditions sur le signe de  $\frac{\partial U}{\partial x}$  et de  $\frac{\partial V}{\partial z}$  sont vérifiées dès que  $\frac{\partial w}{\partial z} \geq 0$ . La condition (A-16) donne :

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (\text{A-28})$$

La condition (A-15) donne :

$$\alpha - \beta = \varphi \quad (\text{A-29})$$

On conclut finalement que l'ensemble des conditions est vérifié si  $\frac{\partial w}{\partial z} \geq 0$  en utilisant le champ  $\underline{U}$  avec :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}; \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (\text{A-30})$$

### Extension au cas où $w(-H) > 0$

On se ramène au cas précédent en remplaçant  $w(z)$  par  $v(z) = w(z) - w(-H)$ . Il faut donc trouver un champ cinématique  $\underline{U}$  vérifiant l'ensemble des conditions demandées avec  $v(z)$ .

On considère le champ  $\underline{U}$  défini par :

$$\underline{U}'(x, z) = \underline{U}(x, z) + w(-H)\underline{v}(x, z + H) \quad (\text{A-31})$$

On vérifie alors facilement que l'on a encore les mêmes expressions que précédemment pour  $P_e$  et  $P_m$ . La conclusion  $\gamma^+ = K_p \gamma_h^+$  reste donc encore valable si  $w(z)$  est croissante avec  $w(-H) > 0$ .

#### **A.4. Étude cinématique dans le cas du critère de Tresca avec cohésion proportionnelle à la profondeur**

La démarche va être identique à celle utilisée pour le cas du critère de Coulomb sans cohésion.

##### **A.4.1. Obtention de la solution exacte sous réserve de l'existence d'un champ cinématique vérifiant certaines conditions**

On suppose que l'on connaît la cinématique  $w(z)$  associée à la solution statique pour le problème avec un fluide. Alors nous allons montrer que si cette fonction  $w(z)$  est croissante avec  $w(-H)=0$ , l'inégalité donnée par la relation (A-11) est en fait une égalité.

Supposons qu'il existe un champ de vitesse en déformation plane défini par :

$$\underline{U} = U(x, z)\underline{e}_x + V(x, z)\underline{e}_z \quad (\text{A-32})$$

On suppose que ce champ vérifie les conditions cinématiques suivantes :

$$U(0, z) = -w(z); V(x, -H) = 0 \quad (\text{A-33})$$

et vérifie de plus la condition suivante (saturation du critère de pertinence) :

$$\text{tr}(\underline{d}) = 0 \quad (\text{A-34})$$

On suppose de plus que ce champ satisfait les mêmes hypothèses complémentaires que (A-16) et (A-17) :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \geq 0; \frac{\partial V}{\partial z} \leq 0; \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{A-35})$$

Pour déterminer la puissance des efforts extérieurs, on peut faire le même calcul que pour le matériau de Mohr-Coulomb avec  $\phi=0$ . On trouve :

$$P_e = - \int_{-H}^0 \gamma z w(z) dz \quad (\text{A-36})$$

Il faut maintenant calculer la puissance résistante maximale et notamment la partie due à la résistance du sol que l'on notera  $P_{rms}$ . Comme le sol est un matériau de Tresca, la densité de puissance résistante maximale s'écrit :

$$\pi(\underline{d}) = C(|d_1| + |d_2| + |d_3|) \quad \text{si} \quad \text{tr} \underline{d} = 0 \quad (\text{A-37})$$

Compte tenu des hypothèses (A-34) et (A-35) la densité de puissance résistante maximale peut se récrire :

$$\pi(\underline{U}) = C\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) = 2C \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{avec} \quad C = -cz \quad (\text{A-38})$$

On obtient ensuite  $P_{rms}$  en intégrant la densité ci-dessus (on suppose de plus que  $U(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers l'infini) :

$$P_{rms} = -2c \int_{-H}^0 zw(z) dz \quad (\text{A-39})$$

On peut écrire la puissance résistante maximale de la paroi de la manière suivante:

$$P_{rmp} = -\gamma_h^+ \int_{-H}^0 zw(z) dz \quad (\text{A-40})$$

On peut alors écrire si la puissance résistante maximale de l'interface sol/substratum est nulle :

$$P_{rm} = -(2c + \gamma_h^+) \int_{-H}^0 zw(z) dz \quad (\text{A-41})$$

En écrivant l'inégalité  $P_e \leq P_{rm}$  et en prenant en compte l'inégalité tirée de l'étude statique que sous réserve de l'existence du champ cinématique  $U$  vérifiant les conditions demandées, on conclut finalement:

$$\gamma^+ = \gamma_h^+ + 2c \quad (\text{A-42})$$

#### **A.4.2. Existence d'un champ cinématique satisfaisant les conditions demandées dans le cas où $w(z)$ est croissante avec $w(-H) \geq 0$**

On définit un champ cinématique de la même manière que pour le matériau de Mohr-Coulomb en prenant  $\varphi=0$  et  $\alpha=\pi/2$ . L'extension au cas  $w(-H)>0$  se fait aussi de la même façon que dans le cas du critère de Mohr-Coulomb.

### **A.5. Exemples de cas où la solution est exacte**

#### **A.5.1. Cas où $w(z)=\text{Constante}$**

Plusieurs configurations peuvent conduire à une solution de ce type dans le cas d'une pression hydrostatique :

- la paroi est très résistante à la flexion et la rotation à la base est empêchée, mais pas le déplacement horizontal.

- la paroi est libre à la base et la répartition surfacique des tirants conduit à une force  $F_0$  proportionnelle à la profondeur<sup>2</sup>.

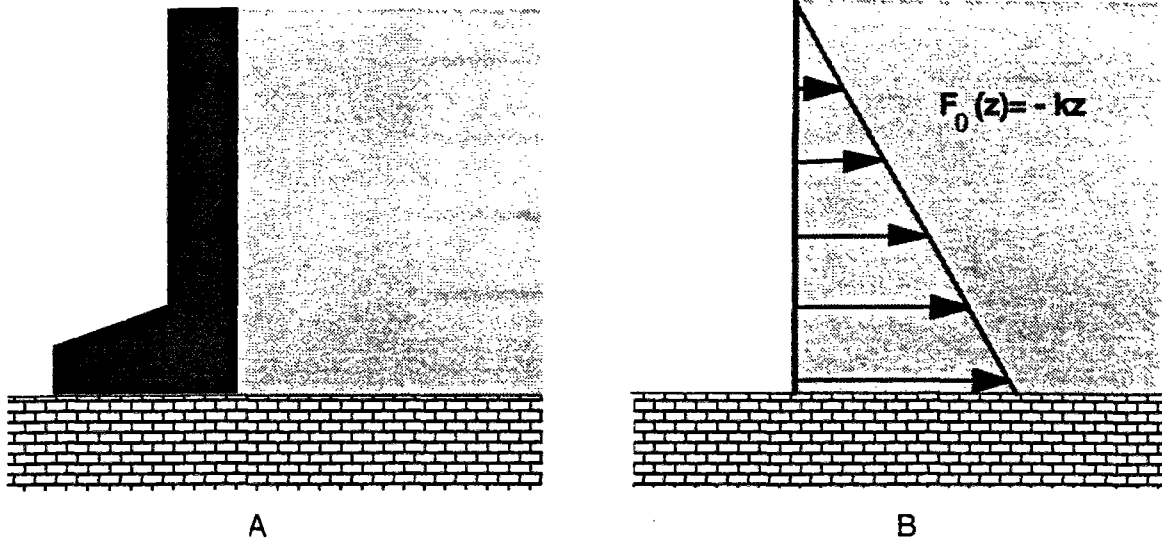


Figure A-3 Paroi rigide à déplacement horizontal (A) - Paroi avec distribution de tirants proportionnelle à la profondeur (B)

### A.5.2. Cas où $w'(z) = \text{Constante} > 0$

Cette situation peut se présenter pour une paroi ayant une résistance suffisamment forte à la flexion dont le déplacement à la base est empêché. La rotation à la base peut être libre ou empêchée par un encastrement.

Si la répartition surfacique des tirants est constante, on peut déduire de l'étude sur les gabions des conditions pour que la solution hydrostatique vérifie  $w'(z) = \text{Constante} > 0$ . On a :

$$\begin{cases} k' = \frac{M_0}{H^2 F_0} \geq 0,074 & (\text{appui simple}) \\ k' = \frac{M_0}{H^2 F_0} \geq 0,059 & (\text{encastrement}) \end{cases} \quad (\text{A-43})$$

<sup>2</sup> On vérifie facilement que la statique  $M=0$  donne dans ce cas la borne statique  $\gamma^+ \geq k$ . La cinématique caractérisée par  $w(z)=\text{Constante} < 0$  donne la borne cinématique  $\gamma^+ \leq k$ .

## A.6. Autres cas

### A.6.1. Fouille butonnée

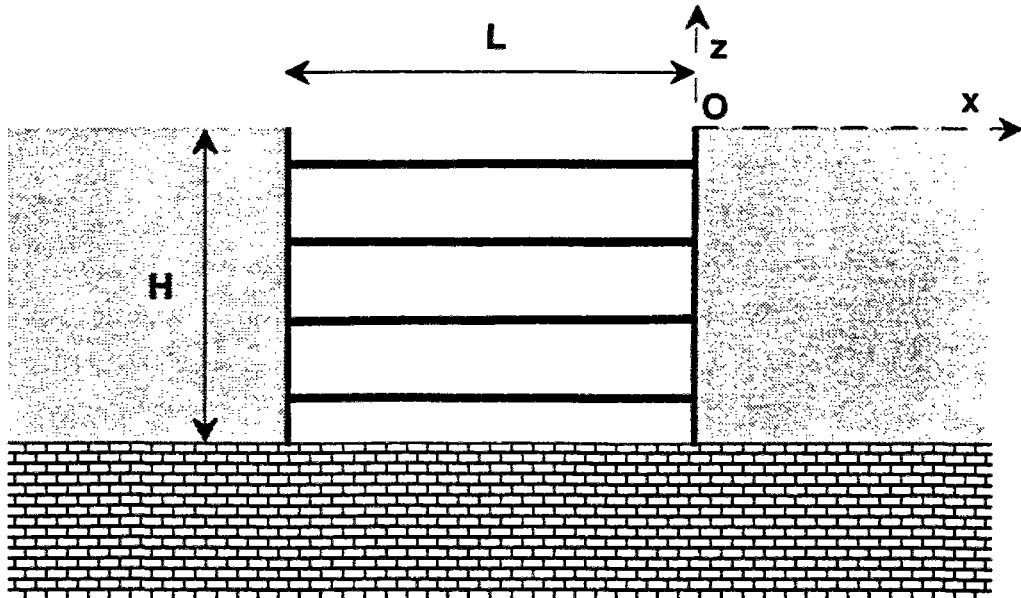


Figure A-4 Fouille butonnée

Pour le type de modélisation que nous avons adopté, une telle fouille butonnée est équivalente à deux talus. Les résultats obtenus précédemment peuvent être étendus immédiatement à ce cas.

### A.6.2. Cas d'une cellule comprise entre deux parois

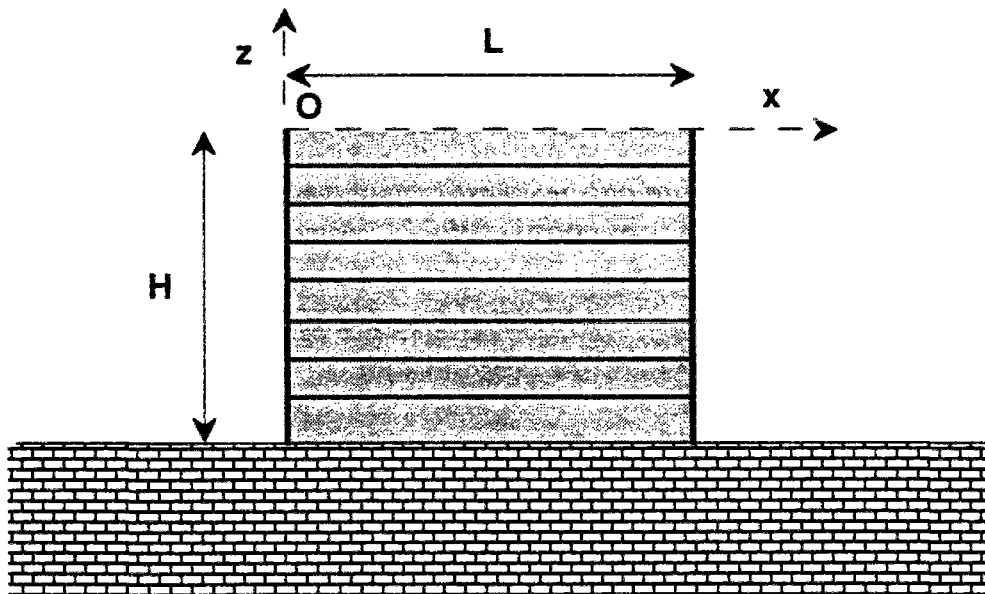


Figure A-5 Cellule comprise entre deux parois

### *Application à un talus renforcé par une paroi et des tirants*

L'étude précédente reste valable pour ce type de configuration si on impose en plus au champ cinématique  $\underline{U}$  la condition :

$$\underline{U}(x, z) = 0 \text{ si } x \geq L \quad (\text{A-44})$$

Le champ que nous avons construit vérifie cette condition dans le cas du critère de Mohr-Coulomb si :

$$L \geq H \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = H\sqrt{K_a} \quad (\text{A-45})$$

Dans le cas du critère de Tresca avec cohésion proportionnelle à la profondeur, on a simplement comme condition :

$$L \geq H \quad (\text{A-46})$$



## B.

### Cas du cylindre à bord appuyé ou encastré

#### B.1 Cylindre à bord appuyé

Nous allons, cette fois, utiliser d'abord la méthode statique par l'intérieur, puis nous exhiberons une cinématique associée. Cette démarche pourra sembler un peu moins naturelle, mais elle permet de mener le plus directement les calculs. En particulier, l'étude cinématique est extrêmement allégée.

Nous serons amenés à distinguer trois cas selon la valeur de  $k$  : coque longue (qui correspond aux petites valeurs du paramètre  $k$ ), coque moyenne, coque courte.

##### B.1.1 Cas des coques longues

Comme dans le cas analogue avec le bord libre, nous allons chercher une distribution des moments telle que  $n=1$  dans une région à partir de la base du cylindre. On désigne par  $m_b$  la fonction représentant la distribution du moment dans cette région à partir de la base.

On doit donc avoir :

$$m_b'' = \frac{1}{k}((f-1) - fu) \quad \text{avec} \quad m_b(0) = 0 \quad (\text{B-1})$$

De l'équation différentielle (B-1) avec la condition à la limite, on tire que  $m_b$  est un polynôme en  $u$  du troisième degré de la forme suivante :

$$m_b = \frac{1}{k}(au + \frac{1}{2}(f-1)u^2 - \frac{1}{3}fu^3) \quad (\text{B-2})$$

On va imposer comme condition supplémentaire qu'il existe deux lignes d'articulation dans cette zone proche de la base. Pour cela, il faut qu'il existe  $u_1$  et  $u_2$  tels que :

$$\begin{cases} m_b(u_1) = -1 & m_b'(u_1) = 0 \\ m_b(u_2) = 1 & m_b'(u_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{B-3})$$

Les conditions (B-3) peuvent s'exprimer de la manière suivante : le polynôme  $m_b+1$  et sa dérivée ont une racine commune  $u_1$ , le polynôme  $m_b-1$  et



sa dérivée ont une racine commune  $u_2$ . Chacune de ces deux conditions est équivalente à la nullité d'un résultant<sup>1</sup> qui est un polynôme en  $f$ . Écrivons ces deux résultants  $r_1$  et  $r_2$  :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{f}{72k^5} (-9f^2k^2 + 18akf^2 - 18akf + 3f^2a^2 - 6fa^2 + 3a^2 \\ &\quad + 6f^3k - 18f^2k + 18fk - 6k + 8a^3f) \\ r_2 &= \frac{f}{72k^5} (-9f^2k^2 - 18akf^2 + 18akf + 3f^2a^2 - 6fa^2 + 3a^2 \\ &\quad - 6f^3k + 18f^2k - 18fk + 6k + 8a^3f) \end{aligned} \quad (B-4)$$

Pour qu'il existe  $u_1$  et  $u_2$  satisfaisant (2-106), il faut qu'il existe une valeur de  $a$  qui soit une racine commune à ces deux polynômes  $r_1$  et  $r_2$ . On suppose que  $f$  est non nul, puisque les seules valeurs de  $f$  qui nous intéressent sont supérieures à 1. En simplifiant ces polynômes par  $f/72k^5$  et en écrivant ensuite leur résultant  $r_3$  en tant que polynômes en  $a$ , on peut éliminer  $a$  et obtenir ainsi une condition ne portant plus que sur  $k$  et  $f$  :

$$r_3 = 110592f^6(f-1)^3k^3(243f^4k^2 - f^6 + 6f^5 - 15f^4 + 20f^3 - 15f^2 + 6f - 1) \quad (B-5)$$

Les seuls cas qui nous intéressent sont ceux avec  $k>0$  et  $f>1$ . Il faut donc que le dernier facteur soit nul. Ceci nous donne la relation suivante entre  $f$  et  $k$  :

$$k = \frac{\sqrt{3} (f-1)^3}{27 f^2} \quad (B-6)$$

On reporte ensuite la valeur de  $k$  obtenue dans  $r_1$  et  $r_2$  et on fait la différence entre ces deux polynômes ; on obtient ainsi un polynôme  $r_4$  qui s'annule pour les valeurs de  $a$  qui sont racines communes de  $r_1$  et  $r_2$ .

$$r_4 = \frac{4\sqrt{3} (f-1)^4 (3af + f^2 - 2f + 1)}{9 f^2} \quad (B-7)$$

On retient puisqu'on ne s'intéresse qu'au cas  $f>1$ , la valeur suivante de  $a$  qui est donc la seule possible :

$$a = -\frac{1 (f-1)^2}{3 f} \quad (B-8)$$

On vérifie directement que cette valeur de  $a$  annule simultanément  $r_1$  et  $r_2$ . On substitue dans l'expression de  $m_b$  les valeurs de  $k$  et de  $a$  que nous venons de déterminer et on obtient :

---

<sup>1</sup> Dans ce cas particulier du résultant d'un polynôme  $P$  et de son polynôme dérivé  $P'$ , on parle de discriminant du polynôme  $P$ .

### *Cas du cylindre à bord appuyé ou encastré*

$$m_b = -3\sqrt{3} \frac{f}{f-1} u + 9\sqrt{3} \frac{f^2}{(f-1)^3} \left( (f-1) \frac{u^2}{2} - f \frac{u^3}{6} \right) \quad (B-9)$$

On peut encore déterminer les valeurs de  $u_1$  et de  $u_2$  comme les deux racines de la dérivée (par rapport à  $u$ ) de ce polynôme  $m_b$ . On trouve ainsi :

$$u_1 = \frac{3 - \sqrt{3} f - 1}{3 f} ; \quad u_2 = \frac{3 + \sqrt{3} f - 1}{3 f} \quad (B-10)$$

L'examen des variations de  $m_b$  pour  $u$  variant entre 0 et  $u_2$  (on suppose  $u_2 < 1$ ), permet de s'assurer que ( $m_b$ ,  $n=1$ ) vérifient toutes les conditions d'une solution statique sur cet intervalle  $[0, u_2]$ . Comme dans le cas du cylindre à bord libre, il faut prolonger cette fonction  $m_b$  qui ne peut représenter la distribution de moment que dans une certaine zone à partir de la base. On envisage de nouveau deux types de prolongement : par une fonction sinusoïdale  $m_s$  ou par un polynôme du troisième degré  $m_p$ . Le cas du prolongement par une sinusoïde avec raccordement en  $u_2$  est le plus simple :

$$m_s = \frac{1}{2} \left( \cos\left(\pi \frac{u - u_2}{1 - u_2}\right) + 1 \right) \quad (B-11)$$

Il faut déterminer pour quelles valeurs de  $k$  ce prolongement est valide ; ceci se fait en déterminant la valeur correspondante de  $n$  grâce à l'équation différentielle d'équilibre et en vérifiant que l'effort normal ainsi déterminé satisfait le critère de résistance. On obtient ainsi que ce prolongement est valide pour un domaine de  $k$  comprenant l'intervalle compris entre 0 et 0,009061. Les valeurs correspondantes de  $f$  sont solutions de l'équation (B-6) et sont donc comprises entre 1 et 1,759.

On obtient le prolongement par un polynôme  $m_p$  en écrivant que ce polynôme est solution de l'équation différentielle (2-31) avec  $n=b=\text{constante}$  et la condition à la limite au bord supérieur  $m_p = m'_p = 0$ . On trouve ainsi :

$$m_p = \frac{1}{k} \left( (f-b) \frac{u^2}{2} - f \frac{u^3}{6} + \frac{1}{2} (2b-f) u - \frac{1}{6} (3b-f) \right) \quad (B-12)$$

Il faut déterminer le paramètre  $b$ . Pour cela, il faut écrire qu'il existe un point de raccordement  $u_r$ . On procède comme dans le cas du cylindre à bord libre et on trouve :

$$b = - \frac{f^4 - 4f^3 + 12f^2 - 16f + 4}{12f(2-f)} \quad (B-13)$$

Comme précédemment, il faut déterminer pour quelles valeurs de  $k$  ce prolongement est valide. L'étude de leur domaine de validité conduit à  $m_p$  valide pour  $f$  compris entre 1,421 et 1,893 soit  $k$  compris entre 0,002371 et 0,01276.

## Annexe B

La limite supérieure de ce domaine de validité est donnée par la condition  $a \geq -1$  : on trouve  $f = 1 + \sqrt{4\sqrt{6} - 9} \approx 1,893$ . La limite inférieure est donnée par la condition  $m_p \geq -1$  pour  $u$  compris entre  $u_r$  et 1. On peut déterminer également le point de raccordement  $u_r$  :

$$u_r = \frac{-f^2 + 4f - 2}{f^2 - 2f - 2} \quad (\text{B-14})$$

On vérifie que l'on a bien  $1 > u_r > u_2$  pour les valeurs de  $k$  comprises entre 0,0023781 et 0,01276. Nous donnons ci-après la distribution de  $m$  et de  $n$  pour le cas du prolongement par un polynôme.

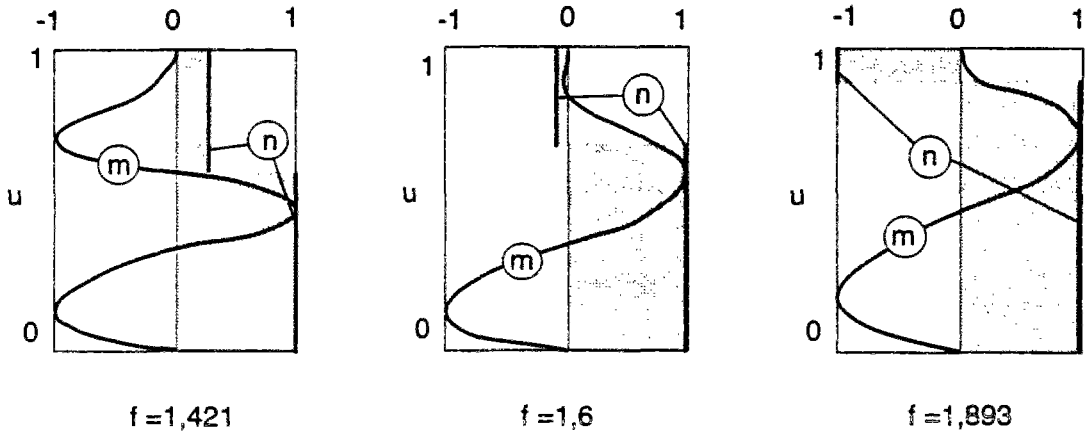


Figure B-1 Tracé de  $m(u)$  et de  $n(u)$  avec le prolongement  
par un polynôme pour différentes valeurs de  $f$

Pour montrer que la valeur de  $f$  ainsi trouvée est la solution exacte nous allons utiliser le théorème d'association déjà cité en 2.2.15. On a vu, grâce à ce théorème que le minorant du chargement extrême donné par une approche est égal à ce chargement extrême quand on peut trouver une cinématique associée. Cette cinématique doit vérifier toutes les contraintes cinématiques (ici il suffit que  $v(0)=0$  puisque nous sommes dans le cas du cylindre à bord inférieur appuyé) et doit vérifier en chaque point que la puissance des efforts intérieurs définis par la statique dans cette cinématique est égale à la puissance résistante maximale.

On définit une cinématique par :

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq u_1 & v = \frac{u}{u_1} \\ u_1 \leq u \leq u_2 & v = \frac{u_2 - u}{u_2 - u_1} \\ u_2 \leq u \leq 1 & v = 0 \end{cases} \quad (\text{B-15})$$

La figure ci-après illustre cette cinématique.

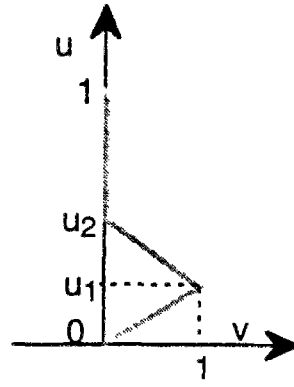


Figure B-2 Cinématique  $v(u)$

Dans notre cas, comme nous l'avons noté en 2.2.15.3, la forme particulière du critère de résistance va simplifier beaucoup les vérifications nécessaires pour prouver qu'un cinématique est associée à une statique donnée. En effet, il suffira, en dehors des contraintes cinématiques, de vérifier les conditions (2-92), (2-93), (2-94).

On vérifie facilement que la cinématique ainsi définie satisfait toutes les conditions pour qu'elle soit associée aux solutions statiques que nous avons trouvées.

On peut donc conclure qu'on a déterminé exactement le chargement extrême pour  $0 \leq k \leq 0,01276$  soit  $1 \leq f \leq 1,893$  ; ce chargement est donné par (B-6).

### B.1.2 Cas des coques moyennes

On cherche des distributions  $m(u)$  telles que  $n=1$  pour  $u < u_r$  et  $n=-1$  pour  $u > u_r$ . On a donc une solution  $m_1$  pour  $u < u_r$  et  $m_2$  pour  $u > u_r$ . Les fonctions  $m_1$  et  $m_2$  doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{cases} m_1'' = \frac{1}{k}((f-1) - fu) \text{ avec } m_1(0) = 0 \\ m_2'' = \frac{1}{k}((f+1) - fu) \text{ avec } m_2(1) = 0 \text{ et } m_2'(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{B-16})$$

De plus, il faut qu'il existe un point  $u_r$  où ces deux solutions se raccordent continûment ainsi que leurs dérivées premières. On impose également qu'il existe un point  $u_1 < u_r$  avec  $m_1(u_1) = -1$  et  $m_1'(u_1) = 0$ .

On peut alors de manière analogue aux calculs faits précédemment déterminer  $k$  en fonction de  $f$ , ainsi que  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $u_r$  et  $u_1$ .

$$k = \frac{1}{18f^2} \left[ \begin{aligned} & \left( 6 - 36f + 27f^2 + 3f^3 - 6\sqrt{6}\sqrt{f+3}f^2 + 6\sqrt{6}\sqrt{f+3}f \right) \\ & + 4\sqrt{6} \left( 4(f+3)^{3/2} - 4\sqrt{6}(f+3) - 12\sqrt{f+3} + 13\sqrt{6} \right)^{3/2} \end{aligned} \right] \quad (\text{B-17})$$

$$m_1 = \frac{1}{k} \left[ (f-1) \frac{u^2}{2} - f \frac{u^3}{6} + \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{f+3} - \frac{f+2}{2} \right) u \right] \quad (\text{B-18})$$

$$m_2 = \frac{1}{k} \left[ (f+1) \frac{u^2}{2} - f \frac{u^3}{6} - \frac{1}{2} (f+2) u + \frac{1}{6} (f+3) \right] \quad (\text{B-19})$$

$$u_r = \sqrt{\frac{f+3}{6}} \quad (\text{B-20})$$

$$u_1 = \frac{f-1}{f} - \sqrt{\left( \frac{f-1}{f} \right)^2 + \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{\sqrt{f+3}}{f} - \frac{2}{f} - 1} \quad (\text{B-21})$$

La condition  $u_r \leq 1$  impose  $f \leq 3$  soit  $k \leq 0,07407$  ; la condition  $m_1 \leq 1$  impose  $f \leq 1,893$  soit  $k \leq 0,01276$ . On rappelle que la condition de validité de la solution trouvée pour les coques courtes était  $f \leq 1,893$  : il n'y a pas de cas non traités entre les coques courtes et les coques moyennes. On peut donner les courbes  $m(u)$  et  $n(u)$  correspondantes.

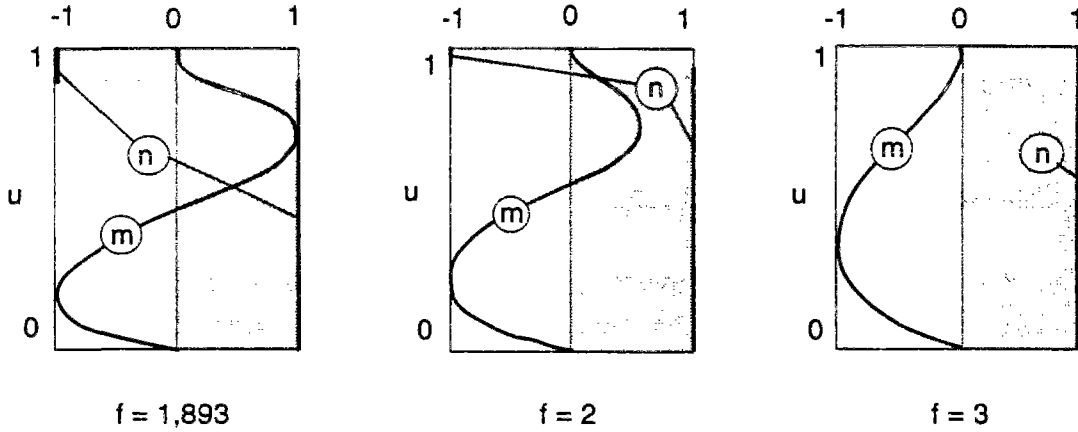


Figure B-3 Tracé de  $m(u)$  et de  $n(u)$  pour les coques moyennes (cas appuyé)

On vérifie que la solution trouvée est exacte, en exhibant une cinématique associée ; on prend la cinématique définie par :

$$\begin{cases} v = \frac{u}{u_1} & \text{pour } u \leq u_1 \\ v = \frac{u_r - u}{u_r - u_1} & \text{pour } u \geq u_1 \end{cases} \quad (\text{B-22})$$

La figure ci-après donne l'allure de ce champ cinématique.

## Cas du cylindre à bord appuyé ou encastré

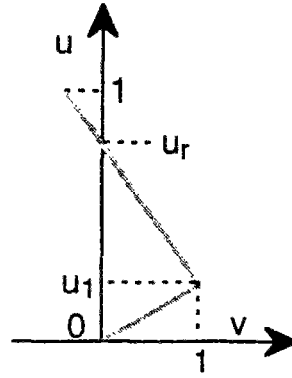


Figure B-4 Cinématique pour le bord appuyé  
dans le cas de la coque moyenne

Comme précédemment, on voit que cette cinématique est associée à la statique définie par (B-17), (B-18), (B-19), (B-20).

On conclut que l'on a déterminé le chargement extrême pour  $0,01276 \leq k \leq 0,07407$  soit  $1,893 \leq f \leq 3$ . Ce chargement est déterminé par (B-16).

### B.1.3 Cas des coques courtes

De manière analogue au cas des coques courtes à bord inférieur libre, la solution va se déduire du cas limite de la coque moyenne ( $f=3$ ). On a :

$$\begin{cases} n=1 \\ m = \frac{1}{k} \left( -\frac{u^3}{3} + u^2 - \frac{u}{2} \right) \end{cases} \quad (\text{B-23})$$

On vérifie que cette distribution de  $m$  et de  $n$  convient ; la condition  $|m| \leq 1$  se traduit par  $k \geq \frac{2}{27} \approx 0,07407$ .

On exhibe une cinématique associée définie par  $v=u$  (Figure B-5).

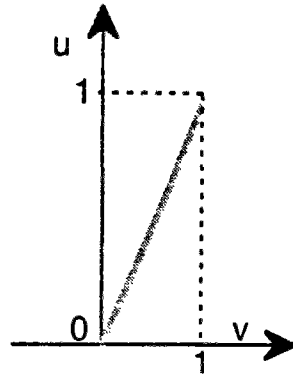


Figure B-5 Cinématique pour le bord appuyé  
dans le cas de la coque courte

La solution statique donnée par (B-23) est associée à la cinématique que nous venons de définir. Ceci permet d'affirmer que la solution  $f=3$  est exacte pour  $k>0,07407$ .

## B.2 Cylindre à bord encastré

Comme pour le cylindre à bord appuyé, nous serons amenés à distinguer trois cas : coque longue, coque moyenne, coque courte.

### B.2.1 Cas des coques longues

Comme pour les autres conditions aux limites au bord inférieur, on cherche une distribution de moments  $m_b$  telle que  $n=1$  dans une zone à partir de la base du cylindre. On impose en plus à la solution  $m=1$  en  $u=0$ ; on a donc :

$$\begin{cases} m_b'' = \frac{1}{k}((f-1)u - fu) \\ m_b(u=1) = 0 \end{cases} \quad (B-24)$$

On impose encore qu'il y ait deux autres cercles d'articulation ; il faut donc qu'il existe  $u_1$  et  $u_2$  avec les conditions suivantes :

$$\begin{cases} m_b(u_1) = -1 & m_b'(u_1) = 0 \\ m_b(u_2) = 1 & m_b'(u_2) = 0 \end{cases} \quad (B-25)$$

La résolution de ces équations conduit aux résultats suivants :

$$k = \frac{1}{24} \frac{(f-1)^3}{f^2} \quad (B-26)$$

### *Cas du cylindre à bord appuyé ou encastré*

$$m_b = 1 - 9 \frac{f-1}{f} u + 24 \frac{f^2}{(f-1)^3} \left( (f-1) \frac{u^2}{2} - f \frac{u^3}{6} \right) \quad (\text{B-27})$$

$$u_1 = \frac{f-1}{2f} \quad ; \quad u_2 = \frac{3f-1}{2f} \quad (\text{B-28})$$

L'utilisation d'un prolongement par une sinusoïde  $m_s$  ou par un polynôme  $m_p$  du troisième degré (solution de l'équation différentielle d'équilibre avec  $n=a=\text{constante}$ ) permet de trouver une distribution de moment  $m(u)$  pour  $u$  compris entre 0 et 1 avec  $k = \frac{1}{24} \frac{(f-1)^3}{f^2}$  pour  $f \leq 2,0315$  soit  $k \leq 0,01108$ .

Les prolongements utilisés s'écrivent :

$$m_s = \frac{1}{2} \left( \cos \left( \pi \frac{u-u_2}{1-u_2} \right) + 1 \right) \quad (\text{B-29})$$

$$m_p = \frac{1}{k} \left( (f-a) \frac{u^2}{2} - f \frac{u^3}{6} - \frac{1}{2} (f-2a)u + \frac{1}{6} (f-3a) \right) \quad (\text{B-30})$$

$$a = \frac{3f^4 - 12f^3 + 42f^2 - 60f + 11}{16(3f^2 - 6f - 1)} \quad (\text{B-31})$$

On vérifie que  $m_s$  est valide au moins pour  $f$  compris entre 1 et 1,8762, soit  $k$  compris entre 0 et 0,00796 et que  $m_p$  est valide pour  $f$  compris entre 1,486 et 2,0315<sup>2</sup> soit  $k$  compris entre 0,002167 et 0,01108. On peut tracer  $m(u)$  et  $n(u)$  pour les différentes valeurs de  $f$  (Figure B-6).

---

<sup>2</sup> La valeur de  $f$  correspondant à la limite supérieure de validité peut être déterminée analytiquement. On trouve :  

$$f = 1 + \frac{2}{3} \sqrt{3} \sqrt{4\sqrt{6} - 9}$$



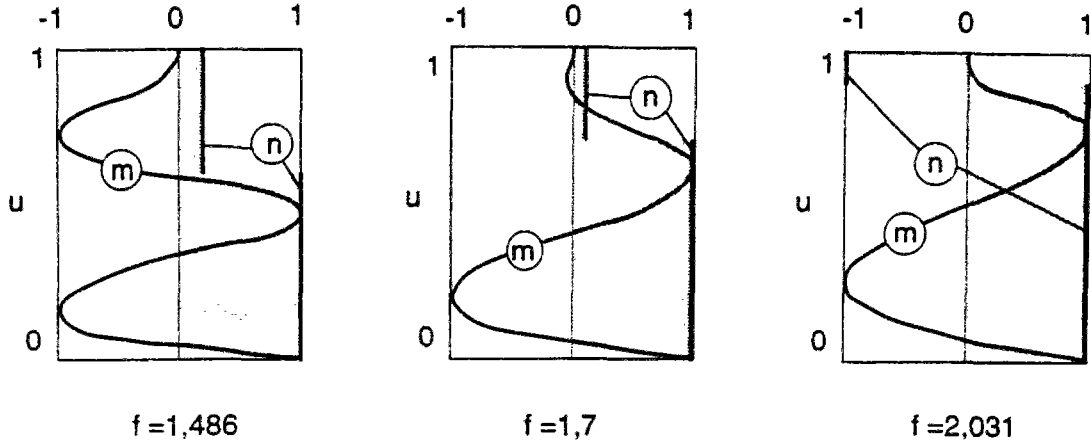


Figure B-6 Tracé de  $m(u)$  et de  $n(u)$  avec le prolongement  
par un polynôme pour différentes valeurs de  $f$

On vérifie que la cinématique définie par (B-15) est associée aux statiques définies ci-dessus<sup>3</sup>.

On conclut que l'on a déterminé le chargement extrême qui est donné par (B-26) pour  $k$  compris entre 0 et 0,01108 soit  $f$  compris entre 1 et 2,0315.

## B.2.2 Cas des coques moyennes

On cherche une distribution du moment  $m(u)$  telle que  $n=1$  pour  $u < u_r$  et  $n=-1$  pour  $u > u_r$ . On désigne par  $m_1$  la distribution du moment pour  $u < u_r$  et par  $m_2$  pour  $u > u_r$ . On impose  $m(u=0)=0$ . On a donc les conditions suivantes :

$$\begin{cases} m_1'' = \frac{1}{k}((f-1) - fu) & , \quad m_1'(0) = 1 \\ m_2'' = \frac{1}{k}((f+1) - fu) & , \quad m_2(1) = 0 \quad , \quad m_2'(1) = 0 \end{cases} \quad (B-32)$$

On demande de plus qu'il existe un point de raccordement  $u_r$  entre  $m_1$  et  $m_2$  assurant la continuité de  $m$  et de  $m'$ . On impose aussi qu'il existe un cercle d'articulation en un point  $u_1$  ; cela donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} m_1(u_r) = m_2(u_r) & ; \quad m_1'(u_r) = m_2'(u_r) \\ m_1(u_1) = -1 & ; \quad m_1'(u_1) = 0 \end{cases} \quad (B-33)$$

L'ensemble de ces équations permet de déterminer  $k$  en fonction de  $f$  ainsi que  $m_1$ ,  $m_2$  et  $u_r$ . Les calculs sont particulièrement complexes dans ce cas; on trouve que  $k$  est solution de l'équation du quatrième degré suivante :

<sup>3</sup> Pour être rigoureux, il faut préciser que la cinématique définie précédemment est complétée par une discontinuité de  $v'$  à la base pour respecter la condition à la limite cinématique. On prend  $v'(0)=0$  et  $v'(u)$  déterminée par (B-15) pour  $u \neq 0$ .

## Cas du cylindre à bord appuyé ou encastré

$$\begin{aligned}
 & k^4(559872f^4) + k^3(-186624f^5 - 559872f^4 - 1990656f^3 + 27648f^2) \\
 & + k^2(23328f^6 + 46656f^5 + 728352f^4 + 432000f^3 + 2125440f^2 - 82944f) \\
 & + k(-1296f^7 + 3888f^6 - 5616f^5 - 108720f^4 + 27648f^3 + 680832f^2 - 601344f + 62208) \\
 & + (27f^8 - 324f^7 + 450f^6 + 4372f^5 - 11565f^4 - 9432f^3 + 49464f^2 - 38880f + 3888) = 0
 \end{aligned} \tag{B-34}$$

Cette équation peut être résolue algébriquement mais la complexité du résultat le rend peu utilisable. On vérifie que pour les valeurs de  $f$  qui nous intéressent, elle n'admet qu'une seule racine réelle positive. On donne ci-après les expressions de  $m_1$ ,  $m_2$  et  $u_r$  en fonction de  $k$  et de  $f$ .

$$m_1 = 1 + \frac{1}{k} \left[ (f-1) \frac{u^2}{2} - f \frac{u^3}{6} + \frac{-(f+2) + \sqrt{\frac{8}{3}(f+3) - 16k}}{2} u \right] \tag{B-35}$$

$$m_2 = \frac{1}{k} \left[ (f+1) \frac{u^2}{2} - f \frac{u^3}{6} - \frac{1}{2}(f+2)u + \frac{f+3}{6} \right] \tag{B-36}$$

$$u_r = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{8}{3}(f+3) - 16k} \tag{B-37}$$

En résolvant numériquement (B-34) et en utilisant (B-37) on peut tabuler  $k(f)$  et  $u_r(f)$ . Les résultats sont consignés dans le tableau suivant.

$f$	$k$	$u_r$	$f$	$k$	$u_r$
2,0315	0,01108	0,9097	2,8	0,03758	0,9639
2,1	0,01315	0,9148	2,9	0,04137	0,9706
2,2	0,01632	0,9221	3,0	0,04521	0,9771
2,3	0,01963	0,9221	3,1	0,04910	0,9837
2,4	0,02305	0,9365	3,2	0,05303	0,9901
2,5	0,02657	0,9435	3,3	0,05700	0,9965
2,6	0,03017	0,9504	3,3553	0,05922	1,0000
2,7	0,03384	0,9572			

Tableau B-1 Valeurs de  $k$  et de  $u_r$  en fonction de  $f$

La solution trouvée est valide pour  $f$  compris entre 2,0315 et 3,3553 soit  $k$  compris entre 0,01108 et 0,05922.

On peut tracer les courbes  $m(u)$  et  $n(u)$  :

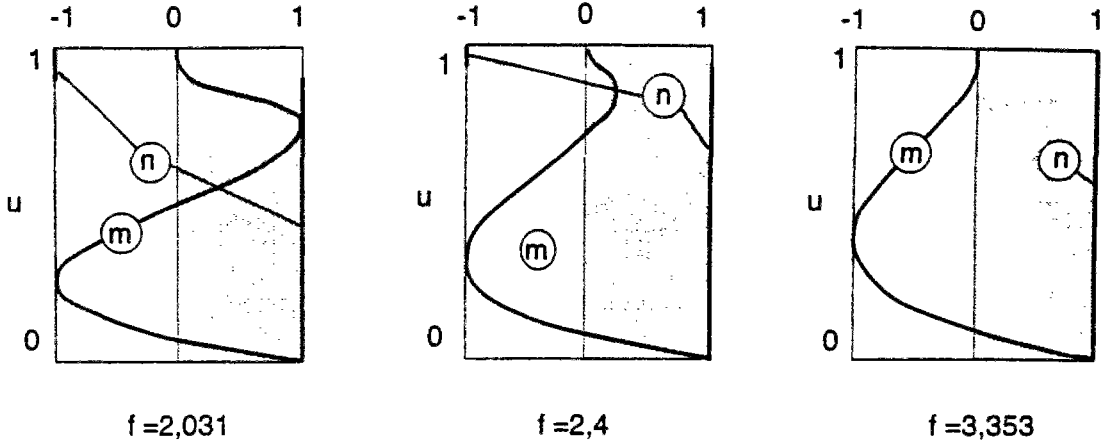


Figure B-7 Tracé de  $m(u)$  et de  $n(u)$  pour les coques moyennes

Pour démontrer que la solution trouvée est exacte, on utilise la cinématique définie par (B-22).

On conclut que la solution déterminée par (B-34) est la solution exacte du problème pour  $k$  compris entre 0,01108 et 0,05922.

### B.2.3 Cas des coques courtes

C'est ce cas qui a été exposé en détail par Olszak et Sawczuk (1959). On cherche une solution avec  $n=1$  sur toute la hauteur du cylindre et  $m=1$  à la base, vérifiant les conditions aux limites  $m(1)=0$ ,  $m'(1)=0$ . Rappelons les résultats :

$$\begin{cases} k = \frac{f-3}{6} \\ m = 1 + \frac{1}{k} \left( (f-1) \frac{u^2}{2} - f \frac{u^2}{2} - f \frac{u^3}{6} - \frac{(f-2)}{2} \right) \end{cases} \quad (B-38)$$

On exhibe une cinématique associée définie par  $v=u$ . La limite de validité est déterminée par la condition  $m \geq -1$ . les extremums locaux de  $m$  sont obtenus en écrivant  $m'=0$  ce qui donne la valeur de  $u$  correspondante égale à  $\frac{f-2}{f}$ ; la valeur de  $m$  en ce point est  $\frac{-4}{f^2(f-3)}$ . L'équation  $\frac{-4}{f^2(f-3)} = -1$  admet une seule solution réelle  $f = 1 + \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}} \approx 3,3553$ . La valeur de  $k$  correspondante est 0,059217 soit  $1/k \approx 16,9$ .

## C.

### Cas de détermination de la solution exacte pour le problème du gabion isolé sous poids propre

#### C.1. Configuration envisagée

On considère un gabion isolé (Figure C-1). On suppose que l'interface remblai/palplanche est lisse. Nous allons montrer que sous certaines hypothèses (dont la partie principale est vérifiée pour une enceinte constituée de palplanches suffisamment résistantes à la flexion), on peut arriver à déterminer la solution exacte du problème de calcul à la rupture sous poids propre.

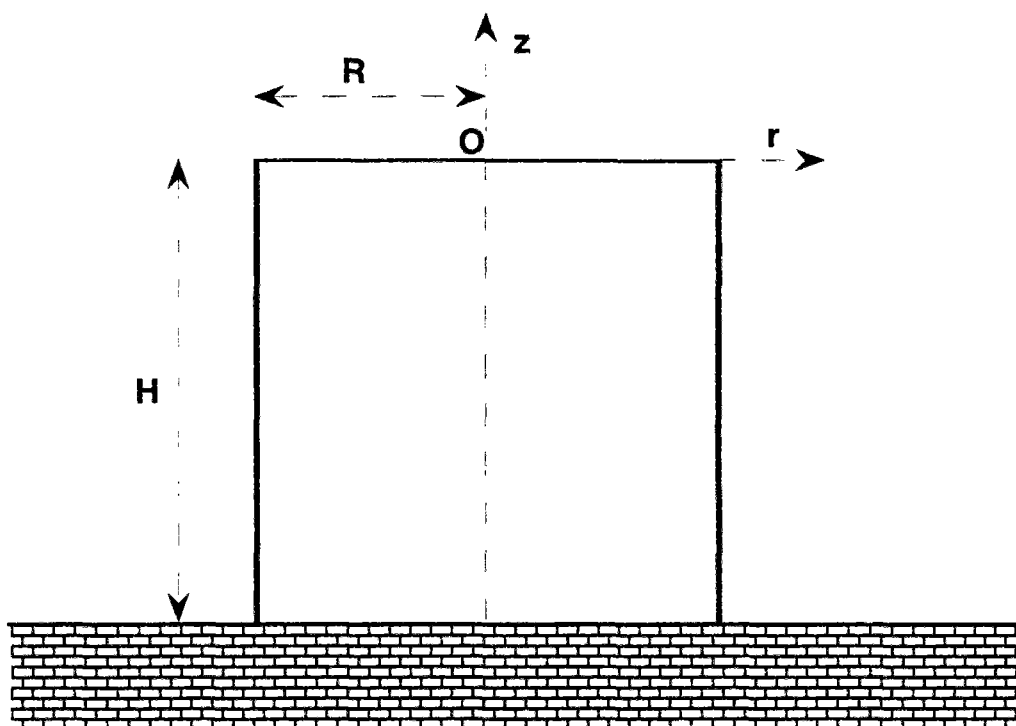


Figure C-1 Configuration géométrique

On se propose pour deux critères de résistance du sol de remblai, de comparer des cinématiques et des statiques, ces dernières étant construites à partir de statiques obtenues pour une pression hydrostatique. Le substratum en dessous de l'extrémité inférieure de la paroi est supposé rigide. On suppose, comme pour l'étude du talus soutenu par une répartition surfacique de tirants, que l'interface entre le remblai et la paroi de palplanches est lisse.

On envisage les deux cas suivants pour le critère de résistance du sol :

- critère de Coulomb sans cohésion
- critère de Tresca avec cohésion proportionnelle à la profondeur

## C.2. Étude statique

On suppose connue la solution exacte  $\gamma_h^+$  du problème dans le cas où le remblai est remplacé par un fluide pesant, ainsi qu'une cinématique correspondant à cette solution exacte, cette cinématique, supposée axisymétrique, étant définie par la donnée de la vitesse de déplacement horizontale de la paroi en fonction de la profondeur  $w(z)$ . On note  $\gamma^+$  le chargement extrême pour le problème avec remblai.

### C.2.1. Cas du matériau de Coulomb

On considère le champ de contraintes de directions principales les directions verticale, radiale et orthoradiale suivant :

$$\sigma_{zz} = \gamma z; \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = K_a \gamma z \text{ avec } K_a = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (C-1)$$

Ce champ satisfait les équations d'équilibre dans le remblai et le critère de résistance dans le remblai. Les efforts exercés sur l'enceinte de palplanches sont identiques à la pression qu'exercerait un fluide de poids volumique  $K_a \gamma$ . On peut alors conclure pour les chargements extrêmes :

$$\gamma^+ \geq K_p \gamma_h^+ \quad (C-2)$$

### C.2.2. Cas du matériau de Tresca avec cohésion proportionnelle à la profondeur

On pose que la cohésion  $C$  peut s'écrire :

$$C = -cz \quad (C-3)$$

On considère alors le champ de contraintes suivant dans le remblai (les directions principales sont les directions verticale, radiale et orthoradiale) :

$$\sigma_{zz} = \gamma z; \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = (\gamma - 2c)z \quad (C-4)$$

On peut alors conclure :

$$\gamma^+ \geq \gamma_h^+ + 2c \quad (C-5)$$

### C.3. Étude cinématique dans le cas du critère de Coulomb

#### C.3.1. Obtention de la solution exacte sous réserve de l'existence d'un champ cinématique dans le remblai satisfaisant certaines conditions

On suppose l'existence d'un champ à symétrie cylindrique défini par la donnée de deux fonctions  $U$  et  $V$ , telles que :

$$\underline{U} = U(r, z)\underline{e}_r + V(r, z)\underline{e}_z \quad (C-6)$$

Ce champ doit vérifier les conditions cinématiques suivantes :

$$U(R, z) = w(z) ; V(r, -H) = 0 \quad (C-7)$$

On va supposer de plus que les directions verticale, radiale et orthoradiale sont les directions principales du tenseur de déformation, ce qui nous donne la condition supplémentaire suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (C-8)$$

On fait également les hypothèses suivantes sur le signe des valeurs principales du tenseur des déformations :

$$U \geq 0 ; \frac{\partial U}{\partial r} \geq 0 ; \frac{\partial V}{\partial z} \leq 0 \quad (C-9)$$

Enfin, on va supposer que ce champ sature la condition de pertinence :

$$\text{tr}(\underline{d}) = \sin \varphi (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \quad (C-10)$$

Compte tenu des hypothèses faites précédemment, la condition ci-dessus se réécrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r U}{\partial r} = -K_p \frac{\partial V}{\partial z} \quad (C-11)$$

Sous ces hypothèses, calculons la puissance des efforts extérieurs :

$$P_e = -2\pi\gamma \int_{z=-H}^0 \int_{r=0}^R V(r, z) r dr dz \quad (C-12)$$

On peut transformer l'expression précédente en utilisant l'égalité  $V = \frac{\partial z V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial z}$  ; on obtient alors en tenant compte de la condition à la limite  $V(r, -H) = 0$  :

$$P_e = 2\pi\gamma \int_{z=-H}^0 \int_{r=0}^R z \frac{\partial V}{\partial z} r dr dz \quad (C-13)$$

En utilisant la relation (11), on obtient :

$$P_e = 2\pi\gamma K_a R \int_{z=-H}^0 -zw(z)dz \quad (C-14)$$

La puissance résistante maximale est nulle dans le remblai (puisque la condition de pertinence est supposée satisfaite). La puissance résistante maximale se réduit alors à la puissance résistante maximale de la paroi de palplanches s'il n'y a pas de puissance résistante maximale à l'interface sol/substratum, ce que nous supposerons, soit que cette interface soit lisse, soit que l'on ait  $U(r,-H)=0$ .

Comme le champ de vitesse  $w(z)$  est associé à la solution statique pour le cas d'un fluide, on a sous l'hypothèse précédente (absence de puissance résistante maximale à l'interface sol/substratum) l'expression suivante pour la puissance résistante maximale :

$$P_{rm} = 2\pi R \gamma_h^+ \int_{-H}^0 -zw(z)dz \quad (C-15)$$

En comparant  $P_e$  et  $P_{rm}$ , en tenant compte du résultat de l'étude statique et sous réserve de l'existence du champ  $\underline{U}$  satisfaisant les hypothèses posées ci-dessus, on peut conclure :

$$\gamma^+ = K_p \gamma_h^+ \quad (C-16)$$

### **C.3.2. Condition suffisante d'existence d'un champ cinématique $\underline{U}$ satisfaisant les conditions demandées**

On va montrer que l'on peut construire un tel champ s'il est possible de trouver une fonction  $f(z')$  avec  $z'=z+H$  telle que :

$$f(z') \geq 0 ; w(z') = \int_0^H f(t) g\left(\frac{z'-t}{R \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)}\right) dt \text{ avec } g(u) = \begin{cases} \frac{\sqrt{u-u^2}}{\pi} & \text{si } u \in [0,1] \\ 0 & \text{si } u \notin [0,1] \end{cases} \quad (C-17)$$

Alors nous allons montrer que le champ défini ci-dessous convient :

$$\underline{U}(r, z') = \int_0^H f(t) \underline{v}(r, z'-t) dt \quad (C-18)$$

Le champ  $\underline{v}(r, z')$  est obtenu par symétrisation du champ par blocs, les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  restant pour l'instant à déterminer :

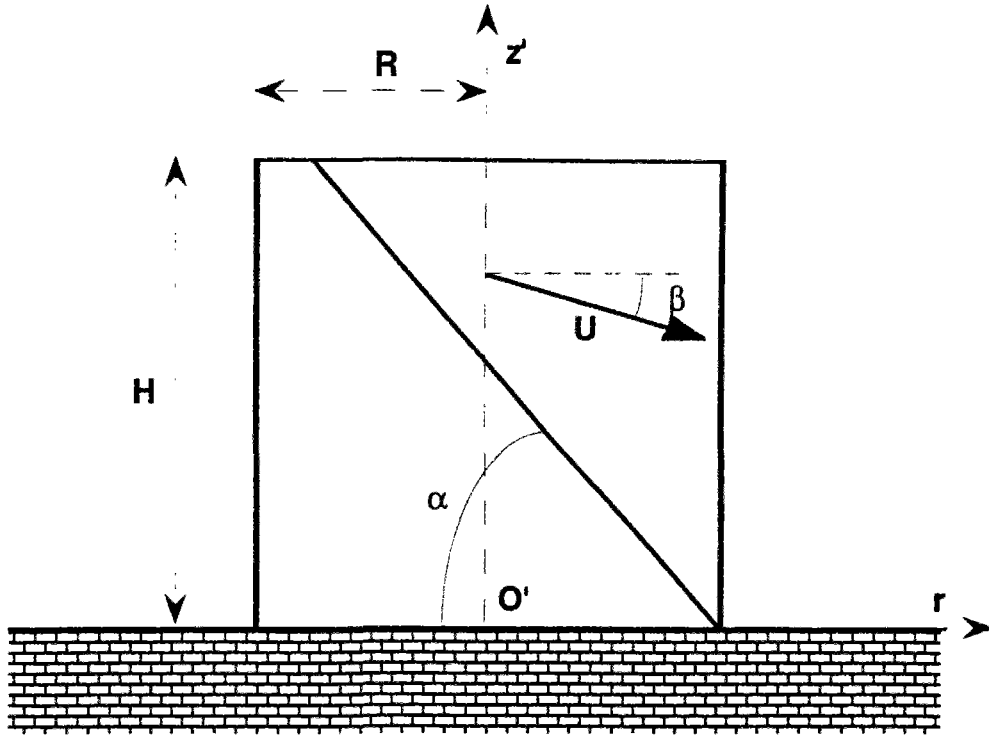


Figure C-2 Champ par blocs servant de base au champ symétrisé

On trouve le champ symétrisé suivant :

$$\begin{cases} v_r = 0 & v_z = 0 & \text{si } u \geq 1 \\ v_r = \frac{1}{\pi} \sqrt{1-u^2} & v_z = -\frac{\tan \beta}{\pi} \arccos(u) & \text{si } 1 \geq u \geq -1 \\ v_r = 0 & v_z = -\tan \beta & \text{si } -1 \geq u \end{cases} \quad \text{avec } u = \frac{R \tan \alpha - z'}{r \tan \alpha} \quad (\text{C-19})$$

On voit sur l'expression (C-18) que les conditions de signe (C-9) sont vérifiées si  $f(t)$  est positive. On vérifie aussi facilement que les conditions aux limites (C-7) sont satisfaites ; on a également  $U(r, z'=0)=0$ .

Étudions la condition (C-8) ; elle s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial z}(r, z') + \frac{\partial V}{\partial r}(r, z') = \\ & = \int_0^H f(t) \left( \frac{1}{\pi} \frac{u(r, z'-t)}{\sqrt{1-u(r, z'-t)^2}} \frac{1}{r \tan \alpha} - \frac{\tan \beta}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-u(r, z'-t)^2}} \frac{R \tan \alpha - z'}{r^2 \tan \alpha} \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{C-20})$$

Cela donne la condition suivante :

$$\frac{1}{\tan \alpha} = \tan \beta \quad \text{soit} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \quad (\text{C-21})$$



Écrivons maintenant l'expression (C-11) exprimant que la condition de pertinence est saturée :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial r U}{\partial r} + K_p \frac{\partial V}{\partial z} = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^H f(t) \left( \frac{\sqrt{1-u^2}}{r} + \frac{(R \tan \alpha - z')u}{r^2 \tan \alpha \sqrt{1-u^2}} - K_p \tan \beta \frac{1}{r \tan \alpha \sqrt{1-u^2}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (C-22)$$

Une condition suffisante pour que la relation (C-22) soit vérifiée est :

$$K_p = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \quad (C-23)$$

On tire finalement de (C-21) et de (C-22) la valeur des angles  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \quad ; \quad \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (C-24)$$

### **C.3.3. Comment déterminer la fonction $g(z')$ connaissant $w(z')$ .**

Pour déterminer  $g(z')$  connaissant  $w(z')$ , il faut réaliser la "déconvolution" du produit de convolution. Cette opération peut présenter des difficultés ; plusieurs méthodes peuvent être envisagées dont l'utilisation de la transformée de Laplace ou la transformée de Fourier rapide. On sait que la transformée de Laplace et la transformée de Fourier transforment le produit de convolution en produit ordinaire d'où leur intérêt pour réaliser cette "déconvolution".

En C.5, on trouvera l'étude de cette opération dans le cas où  $w(z')=z'$ . Ce choix correspond au cas où le déplacement (en translation) de l'enceinte de palplanches est empêché à la base et où la résistance à la flexion de ces palplanches serait forte. On montre dans cette annexe que dans ce cas la fonction  $g(z')$  est positive et donc le résultat de la statique constitue la solution exacte.

## **C.4. Étude cinématique dans le cas du critère de Tresca avec cohésion proportionnelle à la profondeur**

### **C.4.1. Obtention de la solution exacte sous réserve de l'existence d'un champ cinématique dans le remblai satisfaisant certaines conditions**

## Cas de détermination de la solution exacte

On suppose l'existence d'un champ à symétrie cylindrique défini comme précédemment par (C-6). Ce champ doit également satisfaire les conditions aux limites en vitesse (C-7), l'hypothèse que les directions verticale, radiale et orthoradiale sont les directions principales du tenseur des déformations (C-8), les hypothèses sur les signes de  $U$  et de ses dérivées (C-9) et la condition de pertinence du matériau de Tresca :

$$\text{tr}(\underline{\underline{d}}) = 0 \quad (\text{C-25})$$

Compte tenu des diverses hypothèses ci-dessus, on peut écrire la relation suivante qui se substitue à la relation (C-11) du cas étudié précédemment :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial rU}{\partial r} = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (\text{C-26})$$

On peut comme précédemment évaluer sous ces hypothèses la puissance des efforts extérieurs ; on trouve :

$$P_e = 2\pi\gamma R \int_{z=-H}^0 -zw(z)dz \quad (\text{C-27})$$

Il faut maintenant calculer la puissance résistante due au remblai. On rappelle que pour un matériau de Tresca de cohésion  $C$ , la densité de puissance résistante maximale s'écrit :

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = C(|d_1| + |d_2| + |d_3|) \quad \text{si} \quad \text{tr}(\underline{\underline{d}}) = 0 \quad (\text{C-28})$$

Compte tenu des hypothèses (C-7), (C-8), (C-9) et (C-26), on peut écrire :

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = C\left(\frac{1}{r} \frac{\partial rU}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) = 2C \frac{1}{r} \frac{\partial rU}{\partial r} \quad \text{avec} \quad C = -cz \quad (\text{C-29})$$

On obtient ensuite la contribution du remblai à la puissance résistante maximale totale en intégrant la densité ci-dessus :

$$P_{rmr} = 4\pi cR \int_{-H}^0 -zw(z)dz \quad (\text{C-30})$$

On peut écrire la puissance résistante maximale de la paroi comme (C-15) ; en l'absence de puissance résistante maximale à l'interface remblai/substratum, on a l'expression suivante pour la puissance résistante maximale de l'ensemble :

$$P_{rm} = 2\pi R(\gamma_h^+ + 2c) \int_{-H}^0 -zw(z)dz \quad (\text{C-31})$$

En comparant  $P_e$  et  $P_{rm}$ , en tenant compte du résultat de l'étude statique et sous réserve de l'existence d'un champ  $\underline{U}$  satisfaisant les hypothèses posées ci-dessus, on peut conclure :

$$\gamma^+ = \gamma_h^+ + 2c \quad (C-32)$$

### C.4.2. Condition suffisante d'existence d'un champ cinématique $\underline{U}$ satisfaisant les conditions demandées

On peut montrer que l'on peut construire un champ satisfaisant les conditions demandées s'il est possible de trouver une fonction  $f(z')$  avec  $z'=z+H$  telle que :

$$f(z') \geq 0 ; w(z') = \int_0^{+\infty} f(t)g\left(\frac{z'-t}{R}\right)dt \text{ avec } g(u) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2u-u^2}}{\pi} & \text{si } u \in [0,2] \\ 0 & \text{si } u \notin [0,2] \end{cases} \quad (C-33)$$

Alors le champ  $\underline{U}$  défini ci-dessus convient :

$$\underline{U}(r,z') = \int_0^H f(t)\underline{u}(r,z'-t)dt \quad (C-34)$$

Le champ  $\eta(r,z')$  est le même que précédemment avec cette fois  $\alpha=\beta=\pi/4$ . Les calculs déjà effectués montrent que le champ  $\underline{U}$  satisfait l'ensemble des conditions demandées, la condition (C-26) étant un cas particulier de (11) avec  $K_p=1$  soit  $\varphi=0$ , ou encore  $\alpha=\beta=\pi/4$ .

En conclusion, on a montré une méthode de construction du champ  $\underline{U}$  dans le cas où la condition (C-33) est satisfaite. On note que cette condition est identique à la condition (C-17) obtenue pour le cas du matériau de Coulomb sans cohésion quand on fait  $\varphi=0$ .

## C.5. Vérification des conditions suffisantes pour le cas où $w(z')=z'$

### C.5.1. Utilisation de la transformée de Laplace

Il s'agit de déterminer  $f(z')$  telle que :

$$w(z') = \int_0^{+\infty} f(t)g\left(\frac{z'-t}{R \tan \alpha}\right)dt \text{ avec } g(u) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2u-u^2}}{\pi} & \text{si } u \in [0,2] \\ 0 & \text{si } u \notin [0,2] \end{cases} \quad (C-35)$$

La condition pour pouvoir utiliser les résultats précédents est que la fonction  $f(z')$  trouvée soit positive. On propose d'utiliser la transformée de Laplace pour déterminer cette fonction  $f$ . En effet, la transformée de Laplace permet de transformer le produit de convolution en produit ordinaire ; la difficulté sera d'inverser la transformée de Laplace. Pour simplifier les notations, on suppose dans la suite que  $R \tan \alpha=1$ . On pourra se convaincre facilement que les conclusions restent valables pour  $R \tan \alpha \neq 1$ .

## Cas de détermination de la solution exacte

Désignons par  $L(f)(s)$  la transformée de Laplace de  $f(z')$  et par  $L^{-1}(h)(z')$  la transformée de Laplace inverse de la fonction  $h(s)$ . On trouve , en utilisant les noms habituels des variables pour la transformée de Laplace :

$$f(t) = L^{-1}\left(\frac{L(w)}{L(g)}\right) \text{ avec } t = z' \text{ et } g(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2t-t^2}}{\pi} & \text{si } t \in [0, 2] \\ 0 & \text{si } t \in [2, \infty[ \end{cases} \quad (C-36)$$

On peut déterminer analytiquement la transformée de Laplace de  $g(t)$  en utilisant des tables de transformées de Laplace comme par exemple [Handbook of mathematical functions, (Abramovitz M. et Stegun I., 1970) ; on trouve :

$$L(g)(s) = \frac{1}{s} e^{-s} I_1(s) \quad (C-37)$$

La fonction  $I_1$  est une fonction de Bessel modifiée d'ordre 1. La transformée de Laplace de la fonction  $w(t)=t$  est bien connue ; on a :

$$L(w)(s) = \frac{1}{s^2} \quad (C-38)$$

On va donc chercher à déterminer  $f(t)$  comme la fonction dont la transformée de Laplace est :

$$L(f)(s) = \frac{1}{se^{-s}I_1(s)} \quad (C-39)$$

### C.5.2. Utilisation directe d'une méthode numérique

Cette opération peut poser des difficultés à cause de l'instabilité numérique de la transformation inverse de Laplace. Nous avons utilisé une méthode numérique proposée par Richard Bellman, Robert E. Kalaba et Jo Ann Lockett (1966). Nous avons effectué le calcul dans notre cas pour dix points ; les résultats figurent dans le tableau ci-après.

t	0,0131	0,0699	0,175	0,333	0,554
f(t)	18,25	3,87	4,76	2,61	3,32
t	0,854	1,261	1,83	2,70	4,34
f(t)	2,81	3,94	6,41	6,98	11,3

Tableau C-1 Résultats de la méthode numérique directe

On constate que toutes les valeurs ainsi déterminées sont positives.

### C.5.3. Utilisation d'un théorème Taubérien

En utilisant la positivité de  $f(t)$ , on peut appliquer le théorème Taubérien suivant (voir par exemple (Widder W. V., 1972)) :

Si  $\alpha(t)$  est non décroissante et si l'intégrale  $h(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} d\alpha(t)$  converge pour  $s > 0$  et si pour un nombre  $\gamma$  positif ou nul on a :

$$h(s) \sim \frac{A}{s^\gamma} \text{ pour } s \rightarrow 0_+ \text{ (respectivement } s \rightarrow +\infty) \quad (C-40)$$

alors on a :

$$\alpha(t) \sim \frac{At^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \text{ pour } t \rightarrow +\infty \text{ (respectivement } t \rightarrow 0_+) \quad (C-41)$$

Si la fonction  $f$  est positive alors la fonction  $\alpha(t) = \int_0^t f(t') dt'$  est non décroissante et on peut appliquer le résultat précédent en utilisant des développements asymptotiques de la fonction  $\frac{1}{se^{-s}I_1(s)}$  au voisinage de  $0_+$  et de  $+\infty$ . On obtient ainsi les résultats suivants :

$$\alpha(t) \sim t^2 \text{ pour } t \rightarrow +\infty \quad (C-42)$$

$$\alpha(t) \sim 2\sqrt{2}\sqrt{t} \text{ pour } t \rightarrow 0_+ \quad (C-43)$$

Pour tirer des conclusions sur  $f(t)$  au lieu de  $\alpha(t)$ , il faut disposer d'informations complémentaires (par exemple sur la dérivée seconde de  $f$ ). Supposons ces conditions satisfaites, on trouverait alors les équivalents suivants :

$$f(t) \sim 2t \text{ pour } t \rightarrow +\infty \quad (C-44)$$

$$f(t) \sim \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ pour } t \rightarrow 0_+ \quad (C-45)$$

Ces équivalents obtenus de manière heuristique permettent d'interpréter les résultats numériques : on retrouve la croissance de  $f(t)$  pour  $t \rightarrow +\infty$  et  $t \rightarrow 0_+$ . En considérant la fonction  $f(t)-2t$  et la fonction  $f(t)-\sqrt{2}/\sqrt{t}$ , on peut construire, toujours de manière heuristique, les équivalents suivants :

$$f(t) \sim 2t+2 \text{ pour } t \rightarrow +\infty \quad (C-46)$$

$$f(t) \sim \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{t} \text{ pour } t \rightarrow 0_+ \quad (C-47)$$

Pour  $t=4,34$  on trouve  $f(4,34) \approx 10,7$  alors que la méthode numérique donnait 11,3 ; l'accord peut être jugé satisfaisant. Pour  $t=0,0131$ , on trouve en utilisant l'équivalent  $f(0,0131) \approx 12,5$  alors que la méthode numérique donnait 18,25 ; les ordres de grandeur sont cohérents malgré un écart numérique important.

### C.5.4. Utilisation optimisée de la méthode numérique

Pour améliorer la précision, on peut envisager d'appliquer la méthode de Bellman à une fonction auxiliaire  $F(t)=f(t)-2t-\sqrt{2/t}$ . On espère ainsi en éliminant les limites infinies quand  $t \rightarrow 0_+$  et  $t \rightarrow +\infty$ , déterminer la fonction  $F$  de manière plus

précise par l'inversion de sa transformée de Laplace  $L(F)(s) = \frac{1}{se^{-s}I_1(s)} - \frac{2}{s^2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{s}}$ .

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

t	0,0131	0,0699	0,175	0,333	0,554
f(t)	12,46	5,64	3,87	3,16	2,95
t	0,854	1,261	1,83	2,70	4,34
f(t)	3,06	3,79	6,47	7,07	10,79

Tableau C-2 Résultats de la méthode numérique optimisée

On constate à l'issue de ce nouveau calcul, que la nouvelle détermination numérique de  $f(t)$  est beaucoup plus régulière. Les valeurs calculées numériquement par la méthode de Bellman et celles déterminées par les équivalents obtenus de manière heuristique sont maintenant très voisines : pour  $t=0,0131$  on trouve respectivement 12,459 et 12,462, pour  $t=4,34$  on trouve respectivement 10,790 et 10,678. Cette amélioration doit être attribuée au fait que la fonction  $F(t)$  est mieux adaptée à la méthode de Bellman que la fonction  $f(t)$ , parce qu'elle est plus régulière.

## C.6. Conclusion

Nous avons obtenu la solution exacte du problème de calcul à la rupture dans la configuration définie en C.1, sous l'hypothèse complémentaire que la solution exacte dans le cas hydrostatique soit donnée par une cinématique caractérisée par  $w(z')=\lambda z'$ .

Ceci est le cas pour une coque simplement appuyée à la base ou encastree si les conditions suivantes sont satisfaites (cf. chapitre 3) :

- bord simplement appuyé  $k = \frac{RM_0}{H^2 N_0} \geq 0,07407$
- bord encastree  $k = \frac{RM_0}{H^2 N_0} \geq 0,05922$

Ces conditions ne sont pas satisfaites pour les gabions usuels réalisés en palplanches plates. Elles peuvent l'être pour des palplanches à module dont on pourrait envisager l'emploi avec encastrement à la base, pour le soutènement d'un massif cylindrique. On déterminera ainsi le supplément de résistance de la structure dû à la résistance à la traction, la structure résistant cette fois-là essentiellement grâce à la résistance à la flexion des palplanches.

## D.

### Etablissement des équations des coques par la méthode des puissances virtuelles

*Cette annexe reprend pas à pas la démarche exposée dans (Salençon, 1993-a) pour construire la modélisation « plaque » par la méthode des puissances virtuelles. Elle est adaptée ici pour prendre en compte le cas des coques. La plupart des notations sont reprises de cette référence. Les notations concernant la géométrie des surfaces sont généralement reprises de (Bisch, 1993).*

#### D.1. Géométrie du système

Le système  $S$  est une nappe de surface (dans l'espace ambiant  $R^3$ ). Cette nappe de surface est supposée différentiable, orientée ; son bord  $\partial S$  est supposé lui aussi régulier.

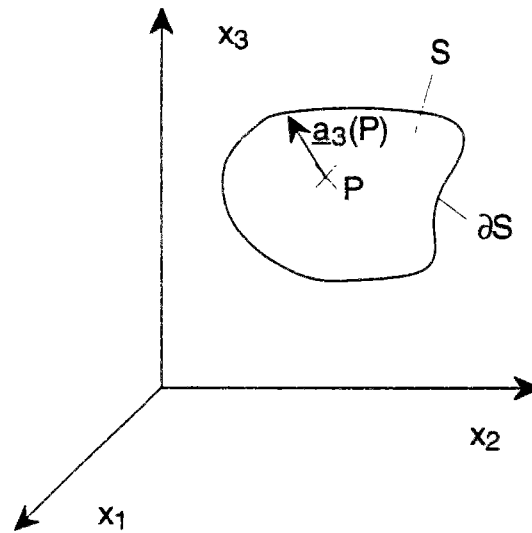


Figure D-1 Notations

On désigne par  $\underline{a}_3(P)$  le vecteur normal orienté en un point  $P$  de la surface.

#### D.2. Champ des vitesses virtuelles

Le choix du type de champ de vitesse virtuelle va déterminer le type de modélisation auquel nous parviendrons. Les vitesses virtuelles que nous envisagerons sont caractérisées par la donnée en chaque point de la surface, de la vitesse virtuelle de translation du point considéré et de la vitesse virtuelle de rotation de la microstructure associée à ce même point. On note :  $\hat{D}(P) = \{P, \underline{\hat{U}}(P), \underline{\hat{\Omega}}(P)\}$  le distributeur des vitesses virtuelles au point  $P$ .



Les éléments de réduction de ce distributeur au point O s'écrivent :

$$\hat{D}(P) = \{O, \underline{\hat{U}} + \underline{OP} \wedge \underline{\hat{\Omega}}(P), \underline{\hat{\Omega}}(P)\} \quad (D-1)$$

### D.3. Gradient du champ de distributeur des vitesses virtuelles

Exprimons le gradient sur la surface S de  $\hat{D}(P)$ . On doit avoir pour tout vecteur tangent  $\underline{t}$  en P :  $\partial(\hat{D}(P)).\underline{t} = \{O, \underline{\partial\hat{U}}.\underline{t} + (\underline{\partial OP}.\underline{t}) \wedge \underline{\hat{\Omega}} + \underline{OP} \wedge (\underline{\partial\hat{\Omega}}.\underline{t}), \underline{\partial\hat{\Omega}}.\underline{t}\}$ . Pour une définition de la dérivée d'un champ de distributeur, on peut se référer à (Salençon, 1994).

Ce distributeur a pour éléments de réduction en P, (on utilise que  $\underline{\partial OP}.\underline{t} = \underline{t}$ ) :

$$\partial(\hat{D}(P)).\underline{t} = \{P, \underline{\partial\hat{U}}.\underline{t} + \underline{t} \wedge \underline{\hat{\Omega}}, \underline{\partial\hat{\Omega}}.\underline{t}\} \quad (D-2)$$

Nous allons maintenant exprimer  $\underline{\partial\hat{U}}.\underline{t}$ ,  $\underline{t} \wedge \underline{\hat{\Omega}}$ ,  $\underline{\partial\hat{\Omega}}.\underline{t}$  en faisant apparaître les composantes normales et les composantes tangentielles. On pose :

$$\begin{cases} \underline{\hat{U}} = \underline{\hat{u}} + \underline{\hat{w}}\underline{a}_3 \\ \underline{\hat{\Omega}} = \underline{\hat{\omega}} + \underline{\hat{\Omega}}_3\underline{a}_3 \end{cases} \quad (D-3)$$

avec  $\underline{\hat{u}}$  et  $\underline{\hat{\omega}}$  qui sont des vecteurs tangents.

#### a) Expression de $\underline{\partial\hat{U}}$

La théorie de la dérivation covariante (notée  $\nabla$ ) sur les surfaces donne la relation suivante :

$$\underline{\partial\hat{u}}.\underline{t} = \underline{\nabla\hat{u}}.\underline{t} + b(\underline{\hat{u}}, \underline{t})\underline{a}_3 \quad (D-4)$$

On a également :

$$\underline{\partial a}_3.\underline{t} = -b(\underline{t}) \quad (D-5)$$

où  $b$  est un représentant de variance (1,1) de la deuxième forme fondamentale (tenseur de courbure).

On peut donc écrire :

$$\underline{\partial\hat{U}}.\underline{t} = \underline{\nabla\hat{u}}.\underline{t} + b(\underline{\hat{u}}, \underline{t})\underline{a}_3 + \underline{\partial\hat{w}}.\underline{t}\underline{a}_3 - \underline{\hat{w}}\underline{b}(\underline{t}) \quad (D-6)$$

Ceci peut encore s'écrire :

$$\underline{\partial \hat{U}} = \underline{\nabla \hat{U}} + \underline{a}_3 \otimes \underline{b}(\underline{\hat{U}}) + \underline{a}_3 \otimes \underline{\partial \hat{W}} - \underline{\hat{W}} \underline{b} \quad (D-7)$$

**b) Expression de  $\underline{t} \wedge \underline{\Omega}$**

On désigne par  $\underline{a}_1, \underline{a}_2$  un système orthonormé direct du plan tangent T. On définit  $\underline{\gamma}$  de la manière suivante :

$$\underline{\gamma}(\underline{a}_1) = \underline{a}_2 ; \underline{\gamma}(\underline{a}_2) = -\underline{a}_1 \quad (D-8)$$

$\underline{\gamma}$  est le représentant de variance (1,1) de la forme antisymétrique fondamentale.

On peut écrire pour tout couple de vecteurs tangents :

$$\underline{t} \wedge \underline{t}' = ((\underline{\gamma} \cdot \underline{t}) \cdot \underline{t}') \underline{a}_3 \quad (D-9)$$

et pour tout vecteur tangent :

$$\underline{a}_3 \wedge \underline{t} = \underline{\gamma} \cdot \underline{t} \quad (D-10)$$

On peut maintenant récrire  $\underline{t} \wedge \underline{\Omega}$  à l'aide de  $\underline{\gamma}$ . On décompose  $\underline{\hat{\Omega}}$  en somme d'un vecteur tangent  $\underline{\hat{\omega}}$  et d'un vecteur normal  $\underline{\hat{\Omega}}_3 \underline{a}_3$  et on utilise les relations précédentes (D-9) et (D-10) :

$$\underline{t} \wedge \underline{\Omega} = -(\underline{a}_3 \otimes (\underline{\gamma} \cdot \underline{\hat{\omega}}) + \underline{\hat{\Omega}}_3 \underline{\gamma}) \cdot \underline{t} \quad (D-11)$$

**c) Expression de  $\underline{\partial \hat{\Omega}}$**

Le calcul est semblable à celui effectué pour  $\underline{\partial \hat{U}} \cdot \underline{t}$ . On obtient :

$$\underline{\partial \hat{\Omega}} = \underline{\nabla \hat{\omega}} + \underline{a}_3 \otimes (\underline{b} \cdot \underline{\hat{\omega}}) + \underline{a}_3 \otimes \underline{\partial \hat{\Omega}}_3 - \underline{\hat{\Omega}}_3 \underline{b} \quad (D-12)$$

d) Expression de  $\partial\{\hat{D}\}$  :

Nous sommes maintenant en mesure de donner l'expression de  $\partial\{\hat{D}\}$ . On remplace dans (D-2),  $\underline{\partial\hat{U}} \cdot \underline{t}$  par son expression tirée de (D-7),  $\underline{t} \wedge \underline{\Omega}$  par son expression tirée de (D-10) et  $\underline{\partial\hat{\Omega}} \cdot \underline{t}$  par son expression tirée de (D-12), on trouve :

$$\begin{aligned} \partial\{\hat{D}\} = \{P, \underline{\nabla\hat{u}} + \underline{a}_3 \otimes \underline{b}(\underline{\hat{u}}) + \underline{a}_3 \otimes \underline{\partial\hat{w}} - \underline{\hat{w}} \underline{b} - \underline{a}_3 \otimes (\underline{\gamma} \cdot \underline{\omega}) - \underline{\hat{\Omega}}_3 \underline{\gamma}, \\ \underline{\nabla\hat{\omega}} + \underline{a}_3 \otimes (\underline{b} \cdot \underline{\omega}) + \underline{a}_3 \otimes \underline{\partial\hat{\Omega}}_3 - \underline{\hat{\Omega}}_3 \underline{b}\} \end{aligned} \quad (D-13)$$

#### D.4. Expression de la densité surfacique de puissance virtuelle des efforts intérieurs

On note  $p_i\{\hat{D}\}$ , la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs. On postule que  $p_i\{\hat{D}\}$  est une fonction linéaire de  $\{\hat{D}\}$  et de  $\partial\{\hat{D}\}$ .

En fait, il ne peut pas y avoir de terme de la forme  $[F] \cdot \{\hat{D}\}$ . D'après le principe des puissances virtuelles, pour tout sous-système  $S'$ , la puissance des efforts intérieurs (égale à  $\int_{S'} p_i\{\hat{D}\}$ ) doit être nulle pour tous les mouvements rigidifiants, c'est à dire tels que  $\hat{D} = \text{Constante}$  sur  $S'$ . Si  $[F]$  n'était pas nul, on pourrait trouver un voisinage  $S'$  et un mouvement rigidifiant tel que  $\int_{S'} [F] \cdot \{\hat{D}\}$  soit non nul.

On note donc  $[X]$  un tenseur tensoriel tel que la densité de puissance des efforts intérieurs s'écrive de la manière suivante :

$$p_i = -[{}^tX] \cdot \partial\{\hat{D}\} \quad (D-14)$$

On pose que les éléments de réduction de  $[X]$  sont :

$$[X] = [P, \underline{X}, \underline{\Gamma}] \quad (D-15)$$

avec :

$$\underline{X} = \underline{N} + \underline{a}_3 \otimes \underline{V}; \underline{\Gamma} = -\underline{\gamma} \cdot \underline{M} + \underline{a}_3 \otimes \underline{C} \quad (D-16)$$

Les vecteurs  $\underline{V}$  et  $\underline{C}$  sont des vecteurs du plan tangent et  $\underline{N}$  et  $\underline{M}$  sont des tenseurs d'ordre 2 agissant sur les vecteurs du plan tangent.  $\underline{N}$  est le tenseur des efforts normaux  $\underline{V}$  est l'effort tranchant,  $\underline{M}$  est le tenseur des moments fléchissants et  $\underline{C}$  est la torsion.

En remplaçant dans ( D-14),  $\underline{\underline{X}}$  et  $\underline{\underline{\Gamma}}$  par leurs expressions tirées de( D-16) et les éléments de réduction de  $\partial\{\hat{D}\}$  telles qu'ils apparaissent dans ( D-13), on obtient :

$$\begin{aligned} p_i = & -{}^t \underline{\underline{N}} : (\underline{\underline{\nabla}} \hat{u} - \hat{w} \underline{\underline{b}} - \hat{\Omega}_3 \underline{\underline{\gamma}}) - \underline{\underline{V}} . (-\underline{\underline{\gamma}} . \hat{w} + \underline{\underline{b}} . \hat{u} + \partial \hat{w}) \\ & - ({}^t \underline{\underline{M}} . \underline{\underline{\gamma}}) : (\underline{\underline{\nabla}} \hat{w} - \hat{\Omega}_3 \underline{\underline{b}}) - \underline{\underline{C}} . (\underline{\underline{b}} . \hat{w} + \partial \hat{\Omega}_3) \end{aligned} \quad (D-17)$$

On pose :

$$\hat{v} = \underline{\underline{\gamma}} . \underline{\underline{w}} \quad (D-18)$$

On peut alors écrire :

$$\hat{w} = -\underline{\underline{\gamma}} . \hat{v} \quad (D-19)$$

Le terme  $({}^t \underline{\underline{M}} . \underline{\underline{\gamma}}) : \underline{\underline{\nabla}} \hat{w}$  peut être transformé en utilisant que le tenseur antisymétrique fondamental est invariant (voir par exemple (Bisch, 1993), d'où  $\nabla(\underline{\underline{\gamma}} . \hat{w}) = \underline{\underline{\gamma}} . \nabla(\hat{w})$ ):

$$({}^t \underline{\underline{M}} . \underline{\underline{\gamma}}) : \underline{\underline{\nabla}} \hat{w} = {}^t \underline{\underline{M}} : \nabla(\underline{\underline{\gamma}} . \hat{w}) \quad (D-20)$$

Donc on peut finalement écrire :

$$\begin{aligned} p_i = & -{}^t \underline{\underline{N}} : (\underline{\underline{\nabla}} \hat{u} - \hat{w} \underline{\underline{b}} - \hat{\Omega}_3 \underline{\underline{\gamma}}) - \underline{\underline{V}} . (\partial \hat{w} - \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{b}} . \hat{u}) \\ & - {}^t \underline{\underline{M}} : (\underline{\underline{\nabla}} \hat{v} - \hat{\Omega}_3 \underline{\underline{\gamma}} . \underline{\underline{b}}) - \underline{\underline{C}} . (\partial \hat{\Omega}_3 - \underline{\underline{b}} . \underline{\underline{\gamma}} . \hat{v}) \end{aligned} \quad (D-21)$$

On en déduit la densité surfacique de puissance résistante maximale en notant  $G(P)$  le domaine admissible pour les contraintes généralisées au point  $P$  :

$$\begin{aligned} \Pi(P; \hat{u}, \hat{w}, \hat{v}, \hat{\Omega}_3) = & \sup \{ {}^t \underline{\underline{N}} : (\underline{\underline{\nabla}} \hat{u} - \hat{w} \underline{\underline{b}} - \hat{\Omega}_3 \underline{\underline{\gamma}}) + \underline{\underline{V}} . (\partial \hat{w} - \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{b}} . \hat{u}) \\ & + {}^t \underline{\underline{M}} : (\underline{\underline{\nabla}} \hat{v} - \hat{\Omega}_3 \underline{\underline{\gamma}} . \underline{\underline{b}}) + \underline{\underline{C}} . (\partial \hat{\Omega}_3 - \underline{\underline{b}} . \underline{\underline{\gamma}} . \hat{v}), (\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{V}}, \underline{\underline{M}}, \underline{\underline{C}}) \in G(P) \} \end{aligned} \quad (D-22)$$

## D.5. Intégration de la densité de puissance des efforts intérieurs

Pour déterminer les équations d'équilibre , il faut donner une expression de la puissance des efforts intérieurs sur une surface  $S'$  et il faut que cette expression dépende de  $\hat{u}$ ,  $\hat{w}$ ,  $\hat{v}$  et  $\hat{\Omega}_3$  mais pas de leurs dérivées.

Nous allons procéder à des intégrations par parties du type :

$$\begin{aligned}\underline{V} \cdot \partial \underline{\hat{w}} &= \text{div}(\underline{\hat{w}} \underline{V}) - \underline{\hat{w}} \text{div}(\underline{V}) \\ {}^t \underline{N} : \underline{\nabla} \underline{\hat{u}} &= \text{div}({}^t \underline{N} \cdot \underline{\hat{u}}) - \text{div}(\underline{N}) \cdot \underline{\hat{u}}\end{aligned}\quad (\text{D-23})$$

On désigne par  $\underline{v}$  le vecteur tangent à  $S$  normal au bord  $\partial S$  et orienté vers l'extérieur. On obtient en utilisant le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned}P_i &= \int_{S'} (\text{div}(\underline{N}) \cdot \underline{\hat{u}} + {}^t \underline{N} : \hat{\Omega}_3 \underline{\gamma} + {}^t \underline{N} : \underline{\hat{w}} \underline{b} \\ &\quad + \text{div}(\underline{V}) \underline{\hat{w}} + \underline{V} \cdot \underline{\hat{v}} - \underline{V} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{\hat{u}}) \\ &\quad + \text{div}(\underline{M}) \cdot \underline{\hat{v}} + {}^t \underline{M} : (\hat{\Omega}_3 \underline{\gamma} \cdot \underline{b}) \\ &\quad + \text{div}(\underline{C}) \hat{\Omega}_3 + \underline{C} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{\gamma} \cdot \underline{\hat{v}})) dS \\ &\quad - \int_{\partial S'} (({}^t \underline{N} \cdot \underline{\hat{u}}) \cdot \underline{v} + \underline{\hat{w}} \underline{V} \cdot \underline{v} + ({}^t \underline{M} \cdot \underline{\hat{v}}) \cdot \underline{v} + \hat{\Omega}_3 \underline{C} \cdot \underline{v}) dl\end{aligned}\quad (\text{D-24})$$

Le résultat précédent suppose que le champ de vitesse virtuel est continu. Examinons maintenant le cas où le champ de vitesse virtuelle présenterait une discontinuité le long d'une ligne  $L$ .

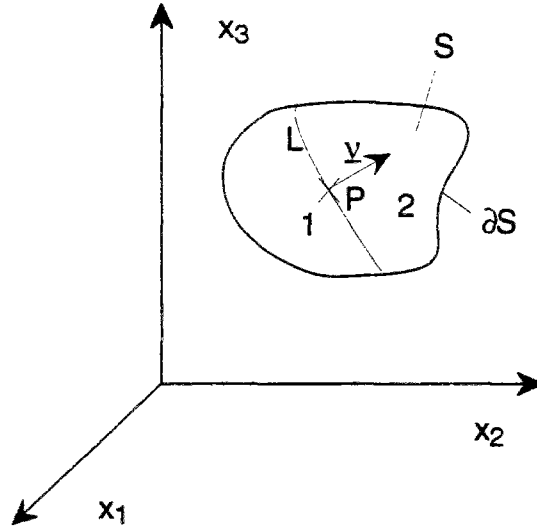


Figure D-2 Existence d'une ligne de discontinuité  $L$  pour le champ de vitesse virtuelle

On pose  $\underline{v}$  la normale orientée de 1 vers 2 et pour une quantité  $A$  ayant comme valeurs  $A_1$  et  $A_2$  de part et d'autre de  $L$ ,  $[[A]] = A_2 - A_1$ . Alors, il faut ajouter le terme complémentaire  $P'_i$  suivant à (D-24) :

$$P'_i = - \int_L (({}^t \underline{N} \cdot [[\underline{\hat{u}}]]) \cdot \underline{v} + [[\underline{\hat{w}}]] \underline{V} \cdot \underline{v} + ({}^t \underline{M} \cdot [[\underline{\hat{v}}]]) \cdot \underline{v} + [[\hat{\Omega}_3]] \underline{C} \cdot \underline{v}) dl \quad (\text{D-25})$$

On détermine ensuite la densité linéique de puissance résistante maximale associée à une discontinuité du champ de vitesse virtuel :

$$\Pi(P, \underline{v}(P); \llbracket \underline{\hat{u}} \rrbracket, \llbracket \underline{\hat{w}} \rrbracket, \llbracket \underline{\hat{v}} \rrbracket, \llbracket \hat{\Omega}_3 \rrbracket) = \sup \{ ({}^t \underline{N} \cdot \llbracket \underline{\hat{u}} \rrbracket) \cdot \underline{v} + \llbracket \underline{\hat{w}} \rrbracket \underline{V} \cdot \underline{v} + ({}^t \underline{M} \cdot \llbracket \underline{\hat{v}} \rrbracket) \cdot \underline{v} + \llbracket \hat{\Omega}_3 \rrbracket \underline{C} \cdot \underline{v}, (\underline{N}, \underline{V}, \underline{M}, \underline{C}) \in G(P) \} \quad (D-26)$$

## D.6. Puissance des efforts extérieurs

On suppose que les efforts extérieurs surfaciques sont constitués d'une densité surfacique de force et d'une densité surfacique de moments. Les forces ont une composante  $p$  selon  $\underline{a}_3$  et  $\underline{f}$  dans le plan tangent. Les moments ont une composante  $c$  selon  $\underline{a}_3$  et  $-\underline{\gamma} \cdot \underline{m}$  dans le plan tangent.

Sur le bord, on suppose une densité linéique de forces de composantes  $R(\underline{v})$  selon  $\underline{a}_3$  et  $\underline{T}(\underline{v})$  dans le plan tangent ; les moments ont une densité linéique  $C(\underline{v})$  selon  $\underline{a}_3$  et  $-\underline{\gamma} \cdot \underline{M}(\underline{v})$  dans le plan tangent.

On écrit la puissance des efforts extérieurs sous la forme :

$$P_e = \int_S (p \hat{w} + \underline{f} \cdot \underline{\hat{u}} + c \hat{\Omega}_3 + \underline{m} \cdot \underline{\hat{v}}) dS + \int_{\partial S} (R(\underline{v}) \hat{w} + \underline{T}(\underline{v}) \cdot \underline{\hat{u}} + C(\underline{v}) \hat{\Omega}_3 + \underline{M}(\underline{v}) \cdot \underline{\hat{v}}) dS \quad (D-27)$$

## D.7. Equations d'équilibre

L'application du principe des puissances virtuelles aboutit aux équations d'équilibre sur la surface de la coque et sur le bord grâce à l'expression des efforts intérieurs (D-24) et de celle des efforts extérieurs (D-27). On trouve ainsi les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{V} + {}^t \underline{N} : \underline{b} + p = 0 \\ \operatorname{div} \underline{N} - \underline{V} \cdot \underline{b} + \underline{f} = 0 \\ \operatorname{div} \underline{C} + {}^t \underline{N} : \underline{\gamma} + {}^t \underline{M} : \underline{\gamma} \cdot \underline{b} + c = 0 \\ \operatorname{div} \underline{M} + \underline{V} - \underline{C} \cdot \underline{b} \cdot \underline{\gamma} + \underline{m} = 0 \end{cases} \quad (D-28)$$

et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \underline{V} \cdot \underline{v} = R(\underline{v}) \\ \underline{N} \cdot \underline{v} = \underline{T}(\underline{v}) \\ \underline{C} \cdot \underline{v} = c(\underline{v}) \\ \underline{M} \cdot \underline{v} = M(\underline{v}) \end{cases} \quad (D-29)$$

## D.8. Restriction aux mouvements de Kirchhoff-Love

Ces mouvements sont caractérisés par le fait qu'une normale à la surface reste normale dans le mouvement virtuel. Cette condition s'écrit :

$$-\hat{v} + \partial \hat{w} + \underline{b} \cdot \hat{u} = 0 \quad (D-30)$$

Les mouvements vérifiant cette condition sont tels que la contribution de  $\underline{V}$  dans la puissance des efforts intérieurs est nulle.

## D.9. Application au cas d'une coque cylindrique

On utilise un système de coordonnées cylindriques.

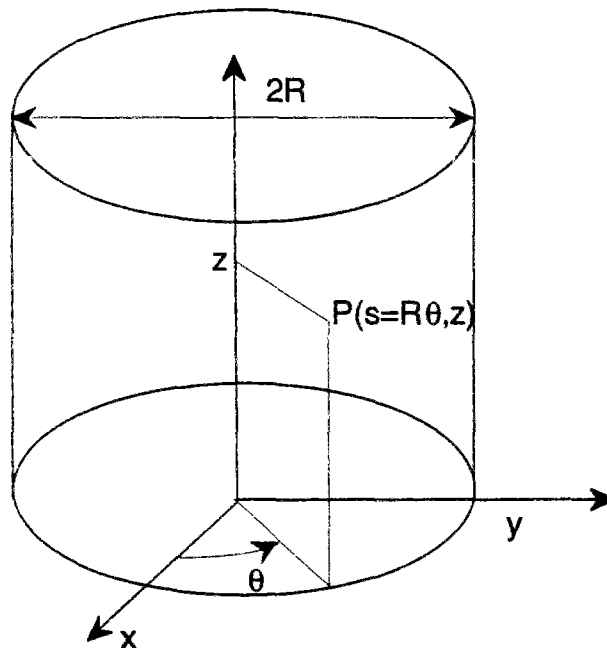


Figure D-3 Coordonnées sur un cylindre

Il est plus simple d'utiliser pour les calculs les coordonnées  $(s, Z)$  que  $(\theta, z)$ .

Avec ces coordonnées, le tenseur  $\underline{\underline{b}}$  s'écrit :

$$\underline{\underline{b}} = \begin{pmatrix} -1/R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D-31})$$

et tous les symboles de Christoffel sont nuls (voir par exemple (Bisch, 1993)). Ceci permet d'écrire les dérivées covariantes comme des dérivées usuelles par rapport à  $s$  et  $z$ . A titre d'exemple, la première équation de (D-28), s'écrit :

$$\frac{\partial V_s}{\partial s} + \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{N_{ss}}{R} + p = 0 \quad (\text{D-32})$$

## **D.10. Raccord avec le milieu 3D classique**

Comme pour les plaques (Salençon, 1993-a), on peut construire à partir du mouvement virtuel défini dans la modélisation coque, un mouvement virtuel dans le solide 3D, puis identifier le terme de bord (surfactive pour le solide 3D, linéique pour la modélisation coque). Dans le cas des plaques, on montre ainsi que  $\underline{C}$  est nul et que les tenseurs  $\underline{\underline{N}}$  et  $\underline{\underline{M}}$  sont symétriques. La généralisation de cette démonstration aux coques s'avère plus délicate (hypothèse des coques minces : l'épaisseur est très petite devant les rayons de courbure).





## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ABRAMOVITZ M. et STEGUN I. A. (edited by) (1972). *Handbook of mathematical functions*. Dover publications, New York, 1046 p.
- ALBERT R. (1971). Étude d'ouvrages de génie civil constitués de matériau pulvérulent retenu par des rideaux de palplanches. Rapport EDF/Wendel-Sidelor, 49 p. + 55 fig.
- ALBERT R., HOÛY A., RAUD J. et VERDIER G. (1972). Étude à l'aide de modèles réduits de batardeaux massifs reposant sur fondation rigide. Compte-Rendu du Congrès Européen de Mécanique des Sols. Madrid, 1972, 231-239.
- AVERBUCH D. (1996). *Approche du dimensionnement des structures en béton armé par le calcul à la rupture*. Thèse de l'ENPC, Paris.
- BAILLY J. P., BASSAL J. L., PILOT G., SCHLOSSER F. (1969). Expérimentation sur le batardeau d'une excavation. *Compte-Rendu du 7ème Congrès International de Mécanique des sols*. Mexico 1969, 407-415.
- BEGOT G. (1984). Construction du quai de Gustavia à Saint-Barthélémy Antilles Françaises. *Travaux*, juillet-août 1984, 40-45.
- BELIDOR (1750). *Architecture hydraulique, Seconde partie qui comprend l'art de diriger les eaux de la mer & des rivières à l'avantage de la défense des Places, du Commerce & de l'Agriculture*. tome 1, chez Charles-Antoine Jombert, Paris.
- BELLMAN R., KALABA R. E. et LOCKETT J. A. (1966). *Numerical Inversion of the Laplace Transform*, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 249 p.
- BELZ C. A. (1970). Cellular Structure Design Methods. *Design and installation of Pile Foundations and Cellular Structures*. Envo Publishing Company, Lehigh Valley, Pennsylvania, 319-338.
- BISCH Ph. (1993). *Plaques et coques*. Cours de l'ENPC, Paris, 291 p.
- BISHOP J. F. W. (1953). On the complete solution of deformations of a plastic rigid material, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 2, n°1, 43-53.
- BLUM H. (1931). *Einspannverhältnisse bei Bohlwerken*. W. Ernst & Sohn. Berlin.
- BOWLES J. E. (1977). *Foundation Analysis and Design*, McGraw-Hill International Book Company.
- BRINCH-HANSEN J. (1953). *Earth pressure calculation*. The Danish Technical Press, Copenhagen.
- BUHAN (de) P. (1986). *Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés*. Thèse d'état, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- BUHAN (de) P., CORFDIR A. (1996). Limit Design of Axisymmetric Shells with Application to Cellular Cofferdams. *Journal of Engineering Mechanics*. Vol. 122, n° 10, octobre 96, 921-929.

## Références bibliographiques

- BUHAN (de) P., DORMIEUX L. (1994). Formulation du critère de rupture d'un milieu poreux. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 319, Série II, 1-7.
- BUHAN (de) P., DORMIEUX L. et MAGHOUS S. (1992). *Élaboration d'une méthode de dimensionnement des gabions cellulaires à l'aide du calcul à la rupture*. Rapport de synthèse du LMS, École Polytechnique, Palaiseau.
- BURKI N. K., RICHARDS R. Jr. (1975). Photoelastic Analysis of a Cofferdam. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*. vol. 102, n° GT2, février, 129-144.
- CAQUOT A. et KERISEL J. (1966). *Traité de mécanique des sols*. 4ème édition. Gauthier-Villars, Paris.
- CARLE R. J. (1970). High Strength Interlock Sheet Piling in Cellular Structures. *Design and installation of Pile Foundations and Cellular Structures*. Envo Publishing Company, Lehigh Valley, Pennsylvania, 367-382.
- CASSAN M. (1974). *Les soutènements cellulaires en palplanches. Méthodes de calcul et application*. Document Fondasol. Avignon. 39 p. + 36 fig.
- CHAKRABARTI S., HUSAK A. D., CHRISTIANO P. P. et TROXEL D. E. (1978-a). Development of Seismic Design Criteria for Category 1 Cofferdams, *Nuclear Engineering and Design*. n°45, 277-283.
- CHAKRABARTI S., HUSAK A. D., CHRISTIANO P. P. et TROXEL D. E. (1978-b). Seismic Design design of retaining walls and cellular cofferdams, *Compte-Rendu de l' ASCE Geotech Engl Div. Spec. Conf. : Earthquake Eng. and Soil Dyn. (PASADENA, CA, 19-21/5/1978)*. vol.1, 325-341.
- CHAPON J. (1982). *Travaux marimes. tome 2*, 4ème édition, Eyrolles, Paris, 380 p.
- CHEN A. C. T. (1970). Discussion on Grayman's paper. *Design and Installation of Pile Foundations and Cellular Structures*. Envo Publishing Company, Lehigh Valley, Pennsylvania, 429-430.
- CHEN W. F. et HAN, D. J. (1988). *Plasticity for structural engineers*. Springer Verlag, New York.
- CINQUINI C., LAMBLIN D. O. et GUERLEMENT G. (1984). Limit Analysis of Circular Shells under Hydrostatic Pressure. *J. Struc. Mech.*, 12(3), 263-278.
- CLOUGH G. W. et GOEKE P. M. (1986). In situ testing for lock and dam 26 cellular cofferdam. *Geotechnical Special Publication n° 6 (ASCE), Compte-Rendu de la Cconférence « In Situ '86 » (Blacksburg, VA, 23-25/6/1986)*, 131-145.
- CLOUGH G. W. et HANSEN L. A. (1977). *A Finite Element Study of the Behavior of the Willow Island Cofferdam*. Technical Report n° CE-218, Department of Civil Engineering, Standford University.
- CLOUGH G. W. et KUPPUSAMY T. (1985). Finite Elements Analyses of Lock and Dam 26 Cofferdam. *Journal of Geotechnical Engineering*, vol. 11, n° 4, avril 1985, 521-541.
- CLOUGH G. W. et MARTIN, J. R. II (1988). Cellular Cofferdams-Developments in Design and Analysis. *Proceedings of the Second International Conference on Case Histories in Geotechnical Engineering, June 8-5, St. Louis, Mo.*, 1597-1608.

## Références bibliographiques

CLOUGH G., MOSHER R., SINGH Y. et KUPPUSAMY T. (1987). Two and three dimensional finite elements analyses of cellular cofferdams. *Actes du colloque Interactions Sols-Structures*, Paris, 553-560.

CORFDIR A. (1995). Calcul à la rupture d'une coque cylindrique soumise à une pression hydrostatique. Application au gabion isolé, *Actes du 12<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, Strasbourg 1995, vol. 4 , 229-232.

CORFDIR A. (1996-a). Calcul à la rupture : étude d'une suite de cinématiques, cas de l'axisymétrie, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 322, série II b, 647-654.

CORFDIR A. (1996-b). Amélioration de la conception et du dimensionnement des ouvrages en gabions cellulaires : approches statiques du calcul à la rupture. Convention ProfilARBED/BUREAU VERITAS/ENPC/STCPMVN 49 p.

CORFDIR A. (1997). Amélioration de la conception et du dimensionnement des ouvrages en gabions cellulaires : étude bibliographique. Convention ProfilARBED/BUREAU VERITAS/ENPC/STCPMVN, 51 p.

COULOMB C. A. (1773). *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes relatifs à l'architecture*. Mémoire présenté à l'Académie Royale des Sciences.

COUSSY O. (1991). *Mécanique des milieux poreux*. Editions Technip, Paris, 437p.

CROSKEY T. S. jr (1993). Maritime applications of polymer geogrid, *Proc. Third International Offshore and Polar Engineering Conference (Singapour, 6-11/6/1993)*, 630-633.

CULMANN K. (1866). *Die graphische Statik*, Zurich.

CUMMINGS E. M. (1957). Cellular Cofferdams and Docks, *J. of the Waterways and Harbors Division*, vol. 83, n° WW3, sept. 1957, Proc. Paper 1366, 1366-1-1366-29.

CUSHING J. J. et MOLINE R. M. (1975). Curved Diaphragm Cellular Cofferdams. *Journal of the Geotechnical Eng. Div.* , vol. 101, n° GT10, octobre 1975, 1055-1059.

DEROY J.-M. et QUEYROI D. (1980). Expérimentation en vraie grandeur d'un gabion de palplanches. *Bull. de liaison Labo. P. et Ch.*, n°110, 109-115.

DESAI C. S. et RIGBY D. B. (1995). Modelling and testing of interfaces, *Mechanics of Geomaterial Interfaces*, publié sous la direction de A. P. S. Selvadurai et de M. J. Boulon, Elsevier, Amsterdam, 107-125.

DESIGN MANUAL 7.02 (1986). *Foundations and Earth Structures*, Naval Facilities Engineering Command, Alexandria (Virginia), 243p.

DESTUYNDER Ph. (1990). *Modélisation des coques minces élastiques*. Masson, Paris, 273p.

DISMUKE T. D. (1970). Stress Analysis of Sheet Piling in Cellular Structures. *Design and Installation of Pile Foundations and Cellular Structures*. Envo Publishing Company, Lehigh Valley, Pennsylvania, 339-365.

DORMIEUX L. et DELAURENS C. (1991). Stabilité d'une cellule de gabion sous poids propre. *Revue Française de Géotechnique*, 55, 47-61.

DRUCKER D. C. (1954). Limit analysis of cylindrical shells under axially-symmetric loading, *Proc. 1st Midw. Conf. Solid. Mech. (Urbana, 1953)*, 158-163.

## Références bibliographiques

- DRUCKER D. C. (1956). On uniqueness in the theory of plasticity, *Quart. Appl. Math.*, vol 14, n°1, 35-42.
- DRUCKER D. C. et SHIELD R. T. (1959). Limit Analysis of Symmetrically Loaded Thin Shells of Revolution. *Journal of Applied Mechanics*, March, 61-68.
- DRUCKER D. C., GREENBERG H. J. et PRAGER W. (1951). The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain. *J. Appl. Mech. Trans. A.S.M.E.* vol 18, p. 371.
- DRUCKER D. C., PRAGER W. et GREENBERG H. J. (1952). Extended limit design theorems for continuous media. *Quart. Appl. Math.*, vol 9, p. 381.
- EASON G. et SHIELD R. T. (1955). The influence of free ends on the load carrying capacities of cylindrical shells. *J. Mech. and Phys. of Solids*, 4, 17-27.
- EAU 1990 (Empfehlungen des Arbeitsausschusses Uferneufassungen) (1992). *Recommendations of the Committee for Waterfront Structures Harbours and Waterways*. Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin, 623p.
- ESRIG M. I. (1970). Stability of cellular cofferdams against vertical shear. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Div.*, vol. 96 n° SM6, novembre 1970, 1853-1862.
- FISHER S. (1971). Deep wells and cellular cofferdams get tunnelers down to the sea. *Construction Methods & Equipment*, mai 1971, 59-63.
- FLÜGGE W. et NAKAMURA T. (1965). *Plastic analysis of shells of revolution under axisymmetric loads*. Ingenieur-Archiv, vol. XXXIV, 238-247.
- FOCSA V. et KLENK V. (1983). Accident technique au batardeau cellulaire lors de la construction du barrage des « Portes de fer », *Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*. série Travaux Publics 197, n°419, novembre 1983, 17-31.
- GALILÉE G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. Leyden.
- GAO D. Y. (1995). Limit analysis of plastic shells subjected to large deformations. *Eur. J. Mech., A/Solids*. vol. 14, n°3, 459-472.
- GAO D. Y. (1996). Post yield analysis for rigid-plastic plates with large deflections. *Eur. J. Mech., A/Solids*. vol. 15, n°4, 599-615.
- GHALI S. A. (1981). An analysis, based on full scale measurements of interlock piles of cellular structured quays. *Ocean Engineering*, vol. 8, n° 3, 259-294.
- GOUGHNOUR R. R. et JONES J. S. (1989). Design and construction of stone column reinforced cofferdams. *Foundations Engineering Current Practices and Principles (ASCE)*. Compte-rendu de la conférence Found. Eng. Curr. Princ. and Pract. (Evanston, IL, 25-29/6/1989), vol 1, 231-243.
- GRAYMAN R. (1970). Cellular Structure Failures. *Design and Installation of Pile Foundations and Cellular Structures*. Envo Publishing Company, Lehigh Valley, Pennsylvania, 383-391.
- GREENBERG H. J. et PRAGER W. (1951). Limit design of beams and frames. *PROC ASCE* 77 (sep. 59).
- GUERIN P. (1982). Le chantier de réparation du quai en gabion de palplanches de la darse 2 à Fos-sur-Mer. *Travaux*, n° 565, avril 1982, 40-42.

## Références bibliographiques

- HANSEN L. A. et CLOUGH G. W. (1982). Finite elements analyses of Cofferdam Behavior. *Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, Edmonton, Canada, vol. 2, 899-906.
- HARA M., KAWAI Y., YAMANAKA E., HASHIMOTO T., UEKI Y. et NAKAGAWA H. (1982). Ultimate Strength of « T »-shaped Connection Sheet Piles for Cellular Sheet Pilings with Straight Web Steel Sheet Piles. *Kawasaki Steel Technical Report*, n° 6, septembre, 64-79.
- HILL R. (1951). On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point, *Phil. Mag.*, vol 42, 868-875.
- HODGE P. G. jr. (1954). The rigid-plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics*, 21, 336-342.
- HODGE P. G. jr. (1960). Yield conditions for rotationally symmetric shells under axysymmetric loading. *Journal of Applied Mechanics*, juin 1960, 323-331.
- HODGE P. G. jr. (1961). The Mises yield condition for rotationally symmetric shells. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol XVIII, n° 4, 305-311.
- HODGE P. G. jr. (1963). *Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells*. Prentice-Hall series in Theoretical and Applied Mechanics, Prentice-Hall Inc./Englewood Cliffs, N.J. .
- HOÛY A. (1986). Dimensionnement des ouvrages en palplanches en acier, édité par l'auteur, Metz, 1986, 492 p.
- HUBLER C. A. (1995). Cellular Cofferdam Wharf Extension for PORT. *Proc. Ports '95, 7th triennial conference*, 382-391.
- JAHREN Ch. T. (1990). Reliability Comparison for Sheet-Pile Cellular Structures. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, vol. 4, n°4, novembre 1990, 216-235.
- JAHREN Ch. T. et HANCHER D. E. (1989). Evaluation of New Concepts for Cellular Structure Construction. *Journal of Construction Engineering and Management*, vol. 115, n°1, mars 1989, 15-34.
- JOHANSEN K. W. (1943). *Brudlinieteorer*, J Gjellerup, Copenhagen.
- KAY J. N. (1976). Sheet Pile Interlock Tension - Probabilistic Design. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, vol. 102, n° GT5, mai, 411-423.
- KIRCHHOFF G. (1850). *Jour. Crelle*, vol. 40.
- KITTISITRA L. (1976). Finite Element Analysis of Circular Cell Cofferdams. *Thèse présentée à la Oregon State University*, Corvallis.
- KUPPUSAMY K., CLOUGH G. W., FINNO R. J. (1985). Finite element analyses of cofferdam with cell interaction. *Proceedings of 11th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, vol. 4, 1993-1996.
- KRYNINE D. P. (1945). Discussion on « Stability and stiffness of cellular cofferdams » by TERZGHI. *Transactions ASCE*, 110, 1175-1178.
- L'UTILISATION DES PALPLANCHES DANS LES TRAVAUX PORTUAIRES. Anonyme (1984). *Navires, Ports et Chantiers*, n° 413, octobre 1984, 573-574.

## Références bibliographiques

LACROIX Y., ESRIQ M. I. et LUSCHER, U. (1970). Design, Construction, and Performance of Cellular Cofferdams. *Proc. Lateral Stresses in the Ground and Design of Earth-Retaining Structures*, Cornell University, Ithaca, N.Y., Juin 22-24, 271-328, ASCE.

LADANYI B. (1995). Frozen soil - structure interfaces, *Mechanics of Geomaterial Interfaces*, publié sous la direction de A. P. S. Selvadurai et de M. J. Boulon, Elsevier, Amsterdam, 3-33.

LAUTZ M. W. (1945). Discussion on stability and stiffness of cellular cofferdams by Terzaghi. *Transactions, ASCE.*, vol. 110, 1165-1170.

LELONG-FERRAND J. et ARNAUDIÈS J. M. (1978). *Cours de Mathématiques, Algèbre*. tome 1, Dunod, Paris, X+534p.

LOCCI J.-M. (1997). Amélioration de la conception et du dimensionnement des gabions : calculs pas à pas. Rapport au titre de la convention ProfilArbed/Bureau Veritas/Ecole Nationale des Ponts et Chaussées/Service Technique Central des Ports Maritimes et des Voies Navigables. (rédaction prévue en 1997).

LOCHMANN U. (1988). *Application du calcul à la rupture à l'étude de la stabilité des gabions circulaires*. Projet de fin d'études, ENPC, Paris, 159p.

MAITLAND J. K. et SHROEDER W. L. (1979). Model Study of Circular Sheetpile Cells. *Journal of the Geotechnical Eng. Div.*, vol. 105, n° GT7, juillet 1979, 805-821.

MAITLAND J. K. et SHROEDER W. L. (1979). Cellular Bulkheads and Cofferdams. *Journal of the Geotechnical Eng. Div.*, vol. 105, n° GT7, juillet 1979, 823-837.

MAZURKIEWICS B. K. (1972). The rupture figure for a double wall cofferdam. *Proceedings of Soil Mechanics and Foundations Division Specialty Conference on Performance of Earth-Retaining Structures*, ASCE, vol.1, part 2, 1271-1281.

MÉRY E. (1840). *Equilibre des voûtes en berceau*. Ann. Ponts et Chaussées. I, 50-70.

MOOKERJEA D. (1972). Cofferdams in Farakka Barrage. *Indian Journal of Power & River Valley Development*. juillet 1972, 265-278.

MOORE B. H. (1986). Geotechnical consideration in design and construction of locks and dam n° 26 , Mississippi river. *Compte-Rendu de « Soil Mechanics and Foundation Engineering, 34Th Annual Conference »* (St Paul, MN, 28/1/1986), (publié par l'Université de Minnesota), 49-67.

OLSZAK W., et SAWCZUK A. (1959). Die Grenztragfähigkeit von zylindrischen Schalen bei verschiedenen Formen der Plastizitätsbedingung. *Acta Technica Academiæ Scientiarum Hungaricæ*, t XXVI, n°1-2, 55-77.

ONAT E. T. (1955). The plastic collapse of cylindrical shells under axially symmetrical loading. *Quart. Appl. Math.*, vol. XIII, n° 1, 63-72.

ONAT E. T., et PRAGER W. (1954). Limit analysis of shells of revolution. *Proc. Roy. Netherlands Acad. Sci.*, series B, 57, 534-548.

OVESEN K. (1962). *Cellular cofferdams , calculation methods and model test*. Geoteknisk Institute, bull. n° 14, Copenhagen.

## Références bibliographiques

OZOLIN E. W., KELSAY H. S., HAYNES W. R. (1995). Upgrading a Cellular Sheetpile Wharf Structure for Post-Panamax Crane Operation, Port of Portland, Oregon. *Proc. Ports '95, 7th triennial conference*, 392-403.

PASTOR J. (1983). Application de la théorie de l'analyse limite aux milieux isotropes et orthotropes de révolution. Formulation numérique de l'approche statique par la méthode des éléments finis. Thèse de Doctorat d'Etat, U.S.M.G.-I.N.P.G., Grenoble.

PATTERSON J. H. (1970) Installation Techniques for Cellular Structures. *Design and Installation of Pile Foundations and Cellular Structures*. Envo Publishing Company, Lehigh Valley, Pennsylvania, 393-412.

PELL W. H. et PRAGER W. (1951). *Proc. 1st Nat. Congr. Appl. Mech.* (Chicago, Ill.).

PENNOYER R. P. (1934). Gravity Bulkheads and Cellular Cofferdams ; Essential Theory of Design When Steel Sheet Piling Is Used. *Civil Engineering*. vol. 4, n° 6, juin, 301-305.

PENNOYER R. P. (1945). Discussion on stability and stiffness of cellular cofferdams by Terzaghi. *Transactions, ASCE.*, vol. 110, 1124-1133.

PERNIER M. (1980). *Conception et calcul des quais en gabions de palplanches métalliques plates*, notice STCPMVN n° 80-3, Compiègne, 112 p.

PILOT G. (1979). Les fouilles butonnées et les gabions, *Cours de mécanique des sols - Tome 3 (Les ouvrages de soutènement)*, Cours de l'ENPC, 24+28p.

POISSON S. D. (1829). *Mémoires de l'Académie*, vol. 8.

POLIVKA J. J. (1944). *Discussion on Stability and Stiffness of Cellular Cofferdams by Terzaghi*. Transactions of ASCEE, septembre, 1178-1187.

PORTER D. L. (1986). Innovative repairs to sheet pile structures. *Compte-Rendu de la Conférence Ports '86 (OAKLAND, CA, 19-21/5/1986) publié par l'ASCE*, 703-712.

RAUD J. (1969). Mesures effectuées sur les batardeaux provisoires en gabions de l'usine marémotrice de la Rance. Rapport E.D.F.

REYNAUD G. (1979). Application du calcul variationnel à quelques problèmes axisymétriques de mécanique des sols. Thèse de 3ème cycle. Université Scientifique et Médicale et Institut National Polytechnique de Grenoble, 254p.

ROSSOW M. P. (1984). Sheet Interlock Tension in Cellular Cofferdams. *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 110, n° 10, octobre, 1446-1458.

ROSSOW M. P. et MOSHER R. L. (1992). Design of cellular cofferdams by the CCEL computer program. *Computers & Structures*, Vol. 42, n° 6, 979-988.

ROTH S. (1987). Steel sheet pile as prefabricated elements in harbour construction. *Bulletin de l'AIPCN (Association Internationale des Congrès de Navigation)*, n° 59, 101-117.

SALENÇON J. (1983). *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 366p.

SALENÇON J. (1990). An introduction to the yield design theory and its application to soil mechanics. *Eur. J. Mech. , A/Solids*, Vol. 5, n° 9, 477-500.



## Références bibliographiques

- SALENÇON J. (1992). *Mécanique des milieux continus, Tome 1, Concepts généraux*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 343p.
- SALENÇON J. (1993-a). *Calcul à la rupture. Poutres, plaques et dalles minces en flexion*. Cours de l'ENPC, 46p.
- SALENÇON J. (1993-b). Yield Design : a Survey of the Theory. *Evaluation of Global Bearing Capacity of Structures*, Springer Verlag, Wien, New York, 1-44.
- SAVE M. et MASSONNET, Ch. (1972). *Calcul Plastique des constructions*. volume II, Structures dépendant de plusieurs paramètres, Ed. CBLIA, Bruxelles.
- SCHNEEBELI G. et CAVAILLÉ-COLL R. (1957). Contribution au calcul de la stabilité des batardeaux à double paroi de palplanches. *Compte-Rendu du 4ème Congrès International de Mécanique des Sols*. Londres. 233-238.
- SCHROEDER W. L. (1987-a). Discussion on Sheet Pile Interlock Tension in Cellular Cofferdams by M. P. ROSSOW, *J. of Geotechnical Eng.* . vol 113, n° 5, mai 1987, 547-549.
- SCHROEDER W. L. (1987). Wharf Bulkhead Behavior at Fulton Terminal, *J. of Geotechnical Eng.* . vol 113, n° 6, juin 1987, 600-615.
- SCHROEDER W. L. (1990). Cellular sheetpile bulkheads. *Geotechnical Special Publication*, (ASCE), n° 25, Compte -Rendu de la conférence « Design and Performance of Earth Retaining Structures » (Ithaca, NY, 18-21/6/1990), 190-216.
- SCHROEDER W. L. et MAITLAND J. K. (1979). Cellular Bulkheads and Cofferdams, *J. of Geotechnical Eng. Div.*, vol. 105, n° GT7, juillet 1979, 823-837.
- SCHROEDER W. L. et MAITLAND J. K. (1979). Model Study of Circular Sheetpile Cells, *J. of Geotechnical Eng. Div.*, vol. 105, n° GT7, juillet 1979, 823-837.
- SENS M.-A. (1971). *Etude de stabilité de barrages et gabions*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Faculté des Sciences de l'Université de Grenoble, 253p.
- SMITH R. J. (1989). Performance of steel sheet pile cellular cofferdams. *Structural design, Analysis and Testing* (ASCE), Compte-Rendu de la conférence « Structures Congress '89 » (San Francisco, CA, 1-5/5/1989), 844-851.
- SOROTA M. D., KINNER E. B., HALEY M. X. (1981). Cellular Cofferdam for Trident Dryrock : Performance. *J. of Geotechnical Eng. Div.*, vol 107, n° GT12, décembre 1981, 1657-1676.
- SOROTA M. D. et KINNER E. B. (1981). Cellular Cofferdam for Trident Dryrock : Design. *J. of Geotechnical Eng. Div.* vol 107, n° GT12, décembre 1981, 1643-1655.
- SWATEK E. P. jr. (1967). Cellular cofferdam design and practice. *Journal of the Waterways and Harbors Division*, ASCE, vol. 93, n° WW3, août, 109-132.
- SWATEK E. P. jr. (1970). Summary : Cellular Structure Design and installation. *Design and Installation of Pile Foundations and Cellular Structures*. Envo Publishing Company, Lehigh Valley, Pennsylvania, 413-423.
- TANAL V. (1984). Innovative Engineering Completes Dredge Spoil Disposal Facility. *Civil Engineering/ASCE*, mars 1984, 41-44.

## Références bibliographiques

TEMAM R. (1983). *Problèmes mathématiques en plasticité*. Gauthier-Villars, Paris, 353p.

TERZAGHI K. (1945). Stability and Stiffness of Cellular Cofferdams. *Transactions, ASCE*. vol. 110, 1083-1119.

TESPA (Technical European Steel Sheet Piling Association) (1993). *Mise en œuvre des palplanches en acier*, Luxembourg, 100p.

THOMAS H. E., MILLER E. J., SPEAKER J. J. (1975). Difficult dam problems-cofferdam failure. *Civil Engineering-ASCE*, août 1975, 69-70.

TURGEMAN S. (1983). *Contribution au calcul des charges limites en milieux isotropes et orthotropes de révolution par une approche cinématique numérique*. Thèse de Doctorat d'Etat, U.M.G.-I.N.P.G., Grenoble.

TURGEMAN S., GUESSAB G. (1995). Approche numérique des chargements extrêmes par une optimisation sans contraintes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 321, série II b, 437-442.

TRESCA H. (1868). *Mémoire sur l'écoulement des corps solides*. Mémoire présenté par divers savants, 18, 733-799.

TSAGARIS D. P. (1945). Discussion on stability and stiffness of cellular cofferdams by Terzaghi. *Transactions, ASCE*, vol. 110, 1133-1135.

TVA (1957). *Steel Sheet Piling Cellular Cofferdams On Rock*, TVA Technical Monograph 75, vol 1, Tennessee Valley Authority, Knoxville, Tenn., retraitage de 1966 sous le titre « Steel Sheet Pile Cellular Cofferdams on Rock », 282 p.

UESIGI M., KISHIDA H. (1986). Frictional resistance at yield between dry sand and mild steel. *Soils and foundations*, vol. 26, n° 4, décembre, 139-149.

VERGOBBI B. (1979). *Dimensionnement et calcul des gabions*. Travail de fin d'études, ENPC, Paris, 70+7p.

WHITE A., CHENEY J. A., DUKE C. M. (1963). Field study of a cellular cofferdam. *Transactions of American Society of Civil Engineers*, vol.128, 463-498.

WHITE A., CHENEY J. A., DUKE C. M. (1968). *Etude sur chantier d'un batardeau de gabions cellulaires* (traduction française de « Field study of a cellular cofferdam. *Transactions of American Society of Civil Engineers*, vol.128, 463-498 », par F. SCHLOSSER et G. PILOT), traduction 67.T.100, n° Fiche DIRR 14 438, LCPC, Paris, 36p. + figures et tableaux.

WIDDER D. V. (1972). *The Laplace Transform*. Princeton University Press, Princeton, 406 p.

Les gabions cellulaires sont constitués d'une enceinte de palplanches métalliques remplie d'un remblai frottant. Ils sont utilisés dans des sites portuaires ou fluviaux comme soutènements ou comme batardeaux. Bien qu'utilisés depuis plus de 80 ans, leur fonctionnement mécanique n'est qu'imparfaitement compris et des accidents surviennent encore, y compris en cours de construction.

L'emploi des méthodes fondées sur la théorie du calcul à la rupture peut contribuer à fonder le dimensionnement de ces ouvrages sur des bases rigoureuses. Le calcul à la rupture des gabions cellulaires présente plusieurs particularités géométrie authentiquement tridimensionnelle, modélisation mixte des éléments constitutifs (enceinte de palplanches modélisées comme une coque, matériau de remblai modélisé comme un milieu continu 3D). La modélisation coque des palplanches permet notamment d'envisager des cinématiques avec des déformations en flexion des palplanches ce qui correspond à certaines observations d'accidents ou de modèles réduits à grande échelle.

Un premier chapitre introductif rappelle la constitution des gabions et des gabionnades, leurs utilisations et leurs méthodes de dimensionnement. Le chapitre 2 donne les bases de la modélisation des gabions que nous utiliserons dans la suite. Les chapitres 3, 4, 5 et 6, appliquent les méthodes statique et cinématique au gabion isolé et à la gabionnade. Le chapitre 7 est consacré à la comparaison des résultats avec des données de différents types : mesures in situ, cas d'accident, essais sur modèles réduits.

*Cellular cofferdams are constituted by a shell of steel sheetpiles filled with sand or gravel backfill. They are used in harbour or fluvial locations as earth or water retaining structures. Although they have been in use for more than 80 years, their mechanical behaviour is still poorly understood and accidents still occur even during construction.*

*The use of design methods based on yield design theory can contribute to found the design of cellular cofferdams on rigorous bases. The yield design of cellular cofferdams has some particular characteristics : true 3-dimensional geometry, mixed modelling of the structure (the sheetpiles are modelled as a shell, the backfill as a 3-dimensional continuous media). Modelling sheetpiles as a shell makes it possible to consider kinematic fields with flexure strain of the sheetpiles. Flexure strain has been observed on some accidents and some model tests.*

*The present work opens with an introductory chapter dealing with the construction of cellular cofferdams, their applications and design methods. Chapter 2 deals with the modelling of cellular cofferdams. Chapters 3, 4, 5 and 6 deal with the application of static and kinematic methods to a single cofferdam cell and to cellular cofferdams. In chapter 7, the results are compared to data from different sources : field measurements, case of accident, model tests.*

MOTS CLES : gabions, palplanches, milieu poreux, calcul à la rupture, analyse limite, méthode statique, méthode cinématique, coque.